

531
C90

G. SOUSLOW,
professeur à l'Université de Kieff.
Traité de mécanique rationnelle.

531
C-90

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,
профессора университета Св. Владиміра.

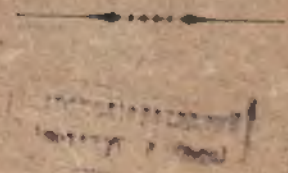
Томъ I.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

КИНЕМАТИКА.

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ.

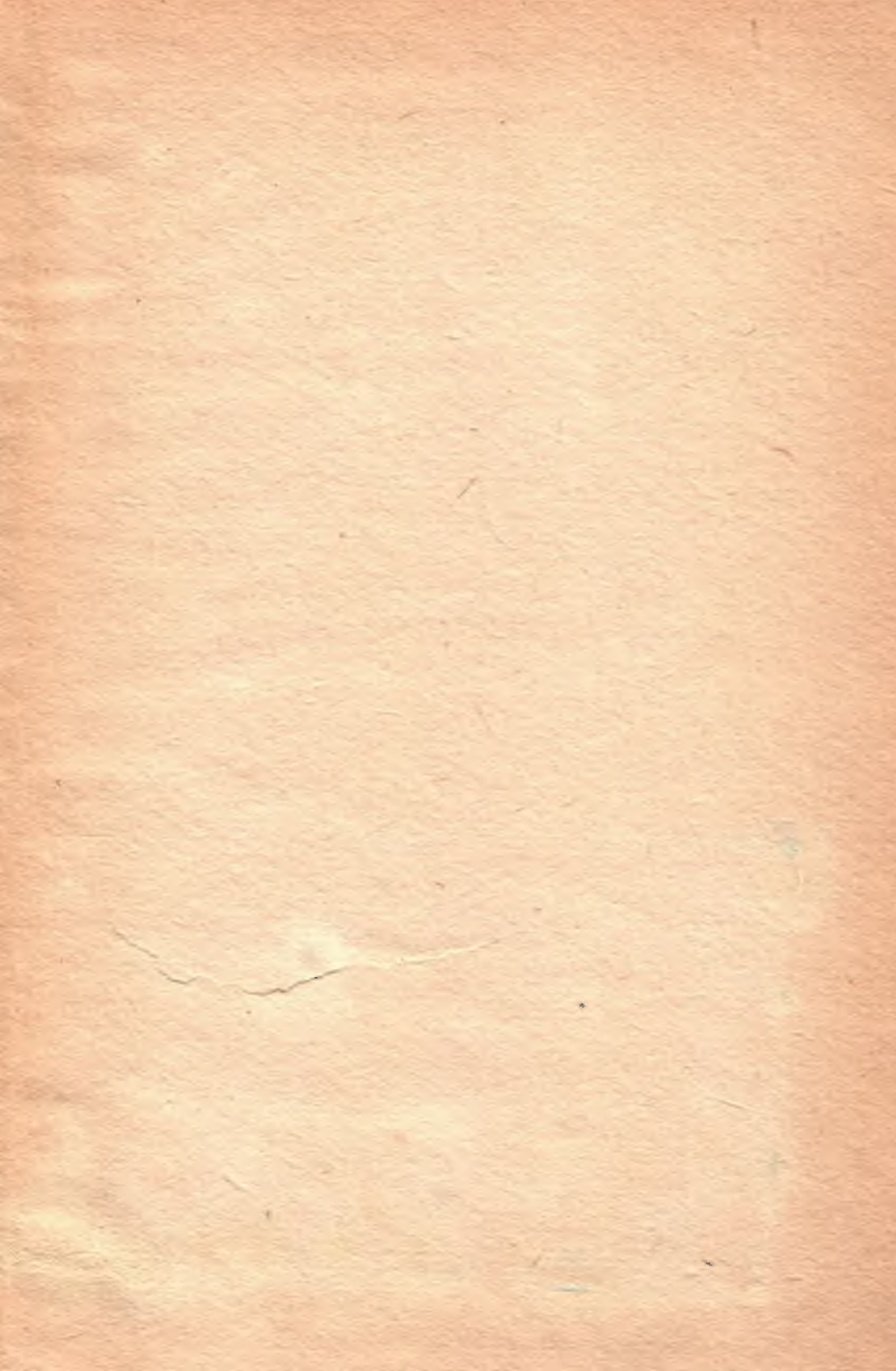
2087
Книгопродавец Н. Я. Оглоблин

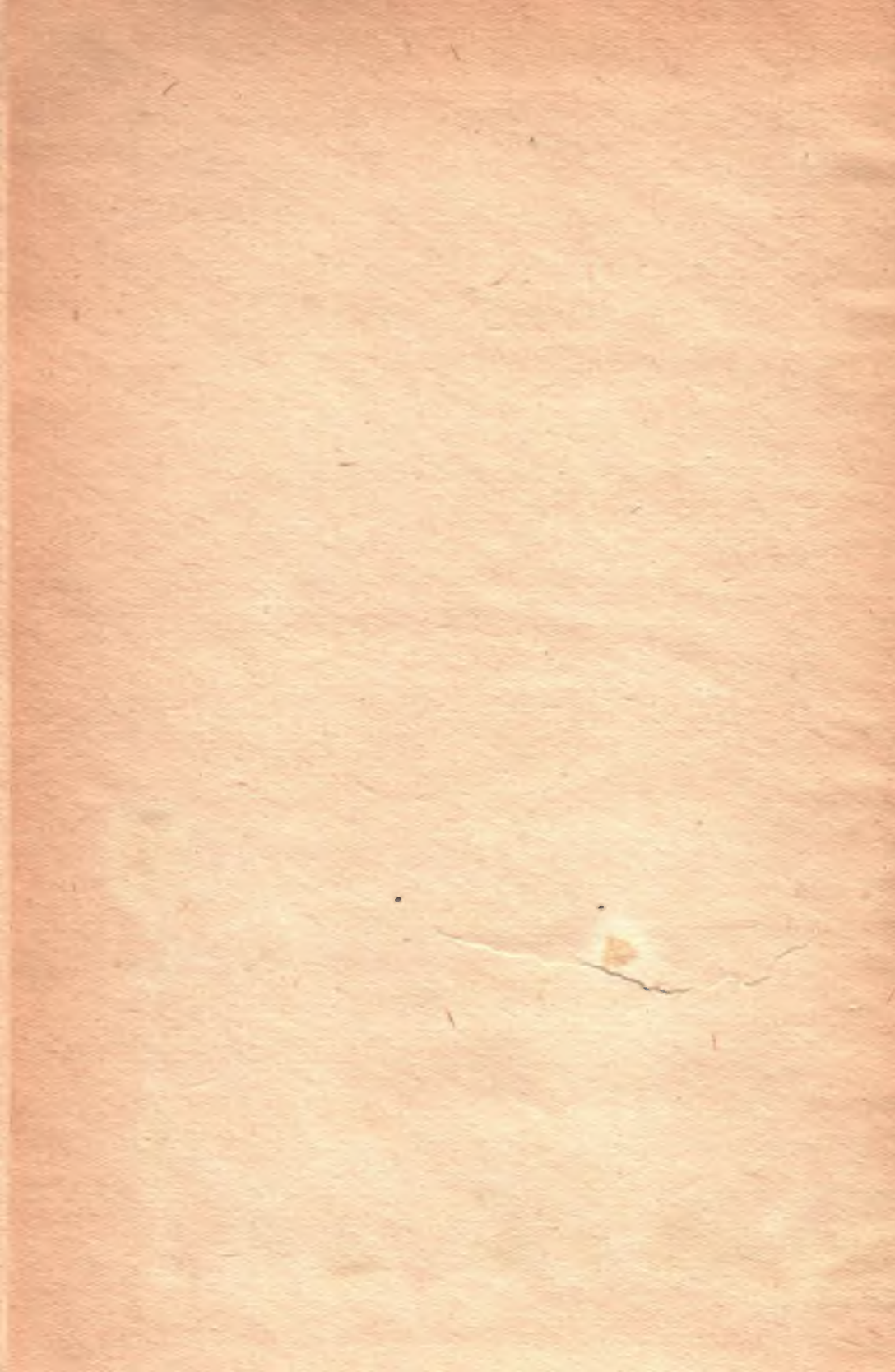


ИЗДАНИЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА
Кіевъ, Крещатикъ № 33. || С.-Петербургъ, Екатеринъ. № 4.

Кіевъ. 1911.

7607





у
531
С-90

G. SOUSLOW,

professeur à l'Université de Kieff.

Traité de mécanique rationnelle.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,

профессора университета Св. Владимира.

проверено
1906 г.

Томъ I.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

КИНЕМАТИКА.

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ.



ЛО

ИЗДАНИЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА

Кіевъ, Крещатикъ № 33.

|| С.-Петербургъ, Екатеринъ. № 4.

Кіевъ. 1911.

2007
Министерство
Внутренних
Делъ
1906 г.



ПРОГРАММА ПО МЕХАНИКѢ.

I. Введение (теорія векторовъ).

Векторы обыкновенные. Геометрическія сложение и вычитаніе. Разложеніе вектора.

Векторы приложенные. Моменты приложеннаго вектора около полюса и около оси. Взаимный моментъ двухъ векторовъ.

Система обыкновенныхъ векторовъ. Главный векторъ. Координаты системы.

Система приложенныхъ векторовъ. Главный моментъ. Координаты системы. Зависимость координатъ системы отъ выбора полюса. Инварианты. Центральная ось. Распредѣленіе главныхъ моментовъ въ пространствѣ. Построеніе Poncelet.

Эквивалентныя системы приложенныхъ векторовъ. Простѣйшія системы. Замѣна данной системы векторовъ простѣйшею, ей эквивалентною. Теоремы Chasles и Moebius'a. Плоская система. Система параллельныхъ векторовъ. Центр системы.

Векторъ-функція. Годографъ. Геометрическая производная. Ортъ. Проекція геометрической производной на неизмѣнное и подвижное направленія. Геометрическій интегралъ отъ вектора.

Геометрическая производная системы приложенныхъ векторовъ. Зависимость координатъ геометрической производной отъ полюса.

II. Кинематика точки.

Единицы длины и времени. Движеніе.

Конечныя уравненія движенія точки. Траекторія. Скорость. Проекціи скорости точки на неподвижное и подвижное направленія и на оси криволинейныхъ координатъ. Опредѣленіе движенія точки по данной скорости. Погонная линія. Скорость линейная, обобщенная, угловая и секторіальная.

Годографъ скорости. Годографъ для движенія точки по коническому сѣченію съ постоянною секторіальною скоростью. Ускореніе. Стрѣлка. Проекціи ускоренія на неподвижное и подвижное направленія, на касательную и главную нормаль траекторіи и на оси криволинейныхъ координатъ. Геометрическая производная отъ скорости, какъ отъ приложеннаго вектора. Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера.

III. Кинематика неизмѣняемой системы (твердаго тѣла).

Твердое тѣло. Движеніе прямое и обращенное. Координаты твердаго тѣла. Эйлеровы углы. Движеніе поступательное. Вращеніе тѣла около неподвижной точки. Движеніе параллельно плоскости. Кардановское движеніе прямое и обращенное. Центръ и ось конечнаго вращенія. Общій случай движенія твердаго тѣла.

Скорости точекъ твердаго тѣла для движенія поступательнаго. Скорости для движенія вращательнаго. Мгновенная угловая скорость. Мгновенная ось. Выраженія для проекцій мгновенной угловой скорости на оси неподвижныя и на оси, неизмѣнно съ тѣломъ связанныя, черезъ Эйлеровы углы. Проекціи геометрической производной по времени отъ переменнаго вектора на оси, неизмѣнно съ твердымъ тѣломъ связанныя. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося параллельно плоскости. Мгновенный центръ.

Центроиды. Центроиды для Кардановскаго движенія и для движенія антипараллелограмма. Аксоиды для вращательнаго движенія. Аксоиды винтовыхъ осей. Гиперболическія колеса.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Центръ ускоренія для движенія параллельно плоскости.

Движеніе точки абсолютное и относительное. Движеніе переносное. Зависимость между скоростями абсолютнаго и относительнаго движеній точки. Связь между ускореніями. Ускореніе поворотное. Теорема Коріюлиса. Величина и направленіе поворотнаго ускоренія для точки, движущейся по земной поверхности. Движенія твердаго тѣла относительное и абсолютное. Движеніе переносное. Зависимость между поступательными и угловыми скоростями въ движеніяхъ абсолютномъ и относительномъ. Разложеніе движеній точки и твердаго тѣла. Разложеніе скорости и ускоренія точки и угловой скорости тѣла.

Настоящее второе изданіе моихъ „Основъ аналитической механики“ по содержанію не отличается существенно отъ перваго изданія; по формѣ сдѣланы нѣкоторыя измѣненія. Во избѣжаніе задержки выхода книги первый томъ раздѣленъ на три части: I—кинематика, II—динамика точки и III—динамика системы. Затѣмъ введены два разбора шрифта съ цѣлью отдѣлить ярче существенное отъ менѣ важнаго. II-ая и III-ья части послѣдуютъ за I-ою въ самомъ непродолжительномъ времени.

Пользуюсь настоящимъ случаемъ, чтобы выразить свою благодарность всѣмъ тѣмъ, что удостоили меня своими замѣчаніями по поводу перваго изданія и такимъ образомъ дали возможность внести въ новое изданіе тѣ или другія улучшенія.

Проф. Г. Суслонг.



ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.	—	Стр.
	Возмущение	I
	Оглавление	III

ВВЕДЕНИЕ (теорія векторовъ).

Векторы.

1	Определение вектора. Геометрическое равенство	1
2	Координаты вектора	2
3	Геометрическое сложение	3
4	Геометрическое вычитание	5
5	Разложение вектора. Составляющие векторы	7

Векторы приложенные.

6	Определение приложенного вектора. Векторы эквивалентные и прямопротивоположные	7
7	Координаты приложенного вектора	7
8	Моментъ приложенного вектора около точки (полюса)	9
9	Моментъ приложенного вектора около оси	10
10	Аналитическое выражение для моментовъ приложенного вектора около осей координатъ	12
11	Аналитическое выражение для момента приложенного вектора около полюса	14
12	Аналитическое выражение момента приложенного вектора около произвольной оси	14
13	Новыя координаты приложенного вектора	15
14	Взаимный моментъ двухъ векторовъ	15
15	Аналитическое выражение для взаимнаго момента векторовъ	17

Система векторовъ.

16	Система векторовъ. Главныя векторы. Координаты системы	18
----	--	----

Система приложенныхъ векторовъ.

17	Система приложенныхъ векторовъ. Главный моментъ. Координаты системы	18
----	--	----

№		Стр
18.	Зависимость координат системы от выбора полюса	19
19.	Инварианты системы векторов	21
20.	Центральная ось системы векторов	22
21.	Уравнение центральной оси	23
22.	Распределение главных моментов в пространстве	24
23.	Построение Поппеле	25

Системы эквивалентныя.

24.	Системы приложенных векторов эквивалентныя между собою (Системы прямопротивоположныя, Системы эквивалентныя нулю).	27
25.	Пространствя системы приложенных векторов. Пара векторов	28
26.	Замѣна данной системы векторовъ пространствя, ей эквивалентною, при инвариантахъ отличныхъ отъ нуля	29
27.	Теоремы Шалля и Мебиуса	30
28.	Замѣна системы векторовъ пространствя при инвариантахъ равныхъ нулю	31
29.	Плоская система векторовъ	32
30.	Система параллельныхъ векторовъ. Центр системы	33

Векторъ—функціи.

31.	Векторъ-функція. Фотографъ. Геометрическая производная	34
32.	Прямая	37
33.	Проекція геометрической производной на неизмѣнное и подвижное направление. Индексъ или ортъ данного направления	39
34.	Геометрическій интегралъ отъ вектора	39
35.	Геометрическая производная системы приложенныхъ векторовъ	40
36.	Зависимость координатъ геометрической производной системы отъ полюса. Производный полюсъ	41

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

КИНЕМАТИКА.

37.	Единицы длины и времени	43
38.	Движеніе	43

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА I.

Конечныя уравненія движенія точки. Скорость точки.

39.	Координаты точки	49
40.	Конечныя уравненія движенія	54
41.	Перемѣщеніе точки. Скорость точки	55

№		Стр.
42.	Проекция скорости точки на неподвижное и подвижное направление	58
43.	Проекция скорости на оси криволинейных координат	59
44.	Составляющие скорости по осям криволинейных координат	63
45.	Преобразование уравнений движения точки к специальному виду	65
46.	Определение движения точки по данной скорости. Потенциальная линия	65
47.	Скорость, линейная, обобщенная условия, секторальная	70

ГЛАВА II

Годографъ скорости точки. Ускорение точки.

48.	Годографъ скорости точки	72
49.	Ускорение точки. Стрѣлка	75
50.	Проекция ускорения точки на неподвижное и подвижное направление	78
51.	Ускорения тангенциальное и нормальное (центростремительное)	78
52.	Проекция ускорения точки на оси криволинейных координат	81
53.	Геометрическая производная отъ скорости, какъ отъ приложеннаго вектора	83
54.	Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера	84
55.	Ускорения точки второго и высшихъ порядковъ	85

КИНЕМАТИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА.

ГЛАВА III

Координаты твердаго тѣла. Конечныя уравненія движенія.

56.	Твердое тѣло. Движение прямое и обращенное	86
57.	Координаты твердаго тѣла. Эйлеровы углы	87
58.	Движение поступательное	93
59.	Вращение тѣла около неподвижной точки (движение параллельно плоскости)	95
60.	Вардановское движение прямое и обращенное	96
	Центръ и ось конечнаго вращенія	98
	Общій случай движенія твердаго тѣла	99

ГЛАВА VI.

Скорости точекъ твердаго тѣла.

61.	Скорости для движенія поступательнаго	102
62.	Скорости для движенія вращательнаго. Мгновенная угловая скорость. Мгновенная ось	102
63.	Выраженія для P , Q , R черезъ Эйлеровы углы	106
64.	Проекция скорости точекъ вращающагося твердаго тѣла на подвижныя оси, связанныя съ тѣломъ связаннымъ. Выраженія для p , q , r черезъ Эйлеровы углы	107

№		Стр.
67	Проекция геометрической прямой по времени от перемещения вектора на оси неизменно съ тѣломъ связанныя	108
68	Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Винтовая ось	110
69	Проекция скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ, на подвижныя оси	113
70	Скорости точекъ тѣла, движущагося параллельно плоскости. Мгновенный центр	115

ГЛАВА V.

Центроиды. Аксонды.

71	Центроиды	117
72	Аксонды для вращательнаго движенія	120
73	Полный изгибъ поверхности. Закручивающія поверхности	122
74	Закручивающія линейчатая поверхности вдоль произвольной	125
75	Аксонды винтовыхъ осей	127

ГЛАВА VI.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла.

76	Проекция ускоренія точекъ твердаго тѣла на неподвижныя оси	131
77	Проекция ускоренія точекъ твердаго тѣла на оси неизменно съ тѣломъ связанныя	134
78	Центръ ускоренія	136

ГЛАВА VII.

Относительное движеніе.

79	Движеніе точки абсолютное и относительное. Движеніе переносное	139
80	Зависимость между скоростями абсолютнаго и относительнаго движенія точки	141
81	Связь между ускореніями точки въ абсолютномъ и относительномъ движеніяхъ. Ускореніе поворота. Теорема Коріолиса	142
82	Движенія твердаго тѣла относительно и абсолютное. Движеніе переносное	146
83	Зависимость между действительными и условными скоростями въ движеніяхъ абсолютномъ и относительномъ	151
84	Разложеніе движенія точки и твердаго тѣла. Разложеніе скорости и ускоренія точки, угловой скорости тѣла	152

ВВЕДЕНИЕ.

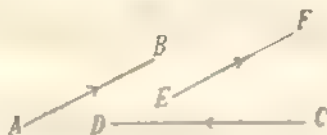
(Теорія векторовъ).

При изложеніи Аналитической Механики почти непрерывно приходится пользоваться опредѣленіями и теоремами того отдѣла Геометріи, который носитъ названіе Теоріи векторовъ. Поэтому прежде всего познакомимся съ основными положеніями этой теоріи, ограничиваясь лишь крайне необходимымъ.

Векторы.

1. **Опредѣленіе вектора. Геометрическое равенство.** Векторомъ называется отрезокъ прямой, имѣющій опредѣленную длину и опредѣленное направленіе. Точки, ограничивающія векторъ, носятъ особыя названія: одна называется началомъ вектора, другая концомъ его. Направленіе вектора идетъ отъ начала къ концу. На чертежахъ направленіе вектора обыкновенно означаютъ стрѣлкою, а въ формулахъ выражаютъ порядкомъ буквъ, поставленныхъ при концахъ отрезка, при чемъ буква, означающая начало, ставится впереди.

Фиг. 1.



Такъ векторы, изображенные на фиг. 1, если имъ приписаны направленія, указанные стрѣлками, читаются AB , CD ; точки A и C служатъ началами, B и D концами; при противоположныхъ направленіяхъ тѣ же векторы слѣдовадо бы обозначать BA и DC ,

и тогда пары точек A, C и B, D помѣнялись бы своими названіями.

Два вектора одинаковой длины, лежащіе на параллельныхъ прямыхъ и одинаково направленные, называются геометрически равными. Это положеніе вытекаетъ изъ даннаго выше опредѣленія вектора: дѣйствительно, въ опредѣленіи за существенные элементы вектора признаны только его длина и направленіе. Геометрическое равенство выражается алгебраическимъ знакомъ $=$, только приравняваемые другъ другу векторы заключаются въ скобки; такъ, геометрическое равенство векторовъ AB и EF (фиг. 1) выразится слѣдующимъ образомъ:

$$(AB) = (EF). \quad (1)$$

Два вектора, равные по длинѣ, лежащіе на параллельныхъ прямыхъ, но противоположно направленные, называются противоположными.

2. Координаты вектора. Векторъ намъ вполне извѣстенъ, если мы знаемъ его длину l и направленіе прямой, на которой онъ лежитъ, т. е. три косинуса α, β, γ угловъ, образуемыхъ этою прямою съ прямоугольными осями координатъ $Oxyz$. Отсюда видно, что векторъ опредѣляется тремя независимыми другъ отъ друга величинами, такъ какъ между косинусами α, β, γ существуетъ зависимость: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Замѣтимъ, что заданіе длины l и двухъ косинусовъ, напр. α и β , не опредѣляетъ вектора однозначно: изъ вышеприведеннаго соотношенія найдемъ для третьяго косинуса γ два значенія, отличающіяся другъ отъ друга знаками и слѣд., одиѣмъ и тѣмъ же величинамъ α, β и l соответствуютъ два вектора (симметрично наклоненные къ плоскости xy). Величины, опредѣляющія векторъ, носятъ названіе координатъ вектора. Всего удобнѣе принять за координаты вектора V три его проекціи*) на оси координатъ. Эти проекціи мы будемъ обозначать V_x, V_y, V_z или X, Y, Z . Въ такихъ координатахъ длина вектора, которую впредь будемъ называть тою же буквою, какъ и самъ векторъ, выразится формулою:

$$V = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad (2)$$

уголъ φ вектора съ какимъ либо направленіемъ U , характеризуемъ косинусами λ, μ, ν , представится слѣдующимъ образомъ:

*) Съ соответственными знаками $+$, когда направленіе проекціи совпадаетъ съ направленіемъ оси, и $-$, въ противоположномъ случаѣ. Направленіе проекціи идетъ отъ проекціи начала вектора къ проекціи конца.

$$\cos \varphi = \frac{1}{r} (X\lambda + Y\mu + Z\nu). \quad (3)$$

Задавіе вектора его проекціями, очевидно, однозначно. Если два вектора: V_1 съ координатами X_1, Y_1, Z_1 и V_2 съ координатами X_2, Y_2, Z_2 геометрически равны, то

$$X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2; \quad (4)$$

а если они противоположны, то

$$X_1 = -X_2, Y_1 = -Y_2, Z_1 = -Z_2. \quad (5)$$

3. Геометрическое сложеніе. Положимъ, намъ даны n векторовъ V_1, V_2, \dots, V_n ; пусть ихъ координаты будутъ

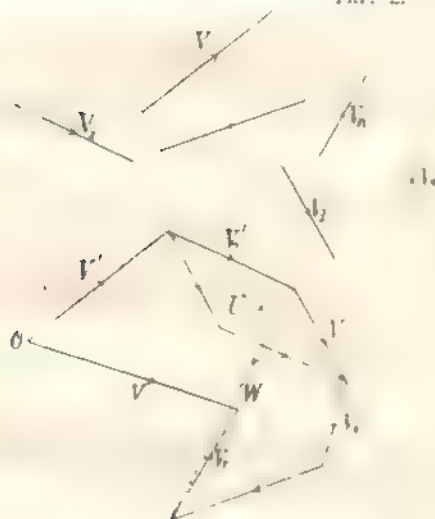
$$X_1, Y_1, Z_1;$$

$$X_2, Y_2, Z_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_n, Y_n, Z_n.$$

Фиг. 2.



Изъ произвольной точки O построимъ (фиг. 2) векторъ V_1' , геометрически равный вектору V_1 ; изъ конца вектора V_1' построимъ векторъ V_2' , геометрически равный V_2 ; изъ конца V_2' век-

торъ V_3' , геометрически равный V_3 и т. д. до V_n' . Векторъ V , имѣющій начало въ началѣ вектора V_1' и конецъ въ концѣ вектора V_n' , называется геометрической суммой векторовъ V_1, V_2, \dots, V_n , а сама произведенная нами операція геометрическимъ сложениемъ. Геометрическое сложение обозначается алгебраическимъ знакомъ $+$, только символы слагаемыхъ векторовъ заключаются въ скобки. Такъ, при вышеуказанныхъ обозначеніяхъ:

$$(6) \quad (V) = (V_1) + (V_2) + \dots + (V_n).$$

Если координаты вектора V означимъ X, Y, Z , то, очевидно, предыдущее геометрическое равенство влечетъ за собою слѣдующія три алгебраическія:

$$(7) \quad \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i; \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y_i; \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i. \end{aligned}$$



Сумма двухъ только векторовъ представляетъ собою діагональ параллелограмма, стороны котораго геометрически равны слагаемымъ, напр. (фиг. 3)

$$(AC) = (V) = (AB) + (BC) = (V_1) + (V_2).$$

Такъ какъ, съ другой стороны,

$$(V) = (AD) + (DC) = (V_2) + (V_1);$$

то, слѣд.,

$$(V_1) + (V_2) = (V_2) + (V_1);$$

т. е. сумма двухъ векторовъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ взяты слагаемые.

Тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и сумма произвольнаго числа векторовъ. Дѣйствительно, она не измѣнится, если мы нѣсколько рядомъ стоящихъ слагаемыхъ замѣнимъ ихъ суммою. Такъ (фиг. 2) слагаемыя V'_1, V'_2, V'_3 могутъ быть замѣнены ихъ суммою W' . Сдѣлаемъ такую замѣну для двухъ рядомъ стоящихъ векторовъ, напр. V'_2 и V'_3 ; по предыдущему, сумма ихъ l не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ; слѣд., и общая сумма не мѣняется отъ перестановки двухъ смежныхъ слагаемыхъ. Если же въ ряду какихъ либо элементовъ мы имѣемъ право переставить два рядомъ стоящие, то, какъ извѣстно, повторяя этотъ приемъ, мы можемъ разбить элементы ряда въ такомъ порядкѣ, въ какомъ намъ угодно; слѣд., на геометрическую сумму произвольнаго числа векторовъ порядокъ слагаемыхъ вовсе не влияетъ.

Всякій векторъ есть геометрическая сумма трехъ своихъ координатъ:

$$(V_i) = (X_i) + (Y_i) + (Z_i),$$

если каждой координатѣ дадимъ направленіе соответственной оси или противоположное (смотря по знаку проекціи).

4. Геометрическое вычитаніе. Операция, при помощи которой по даннымъ векторамъ—суммѣ и одному слагаемому, отыскивается другое слагаемое, носитъ названіе геометрическаго вычитанія.

Фиг. 4.

D



Если (фиг. 4) данная сумма векторовъ AB , а данное слагаемое векторъ (D) , то искомое слагаемое получится, если къ AB прибавимъ векторъ (D) .

вимъ векторъ BE , противоположный (CD) . Дѣйствительно, какъ не трудно видѣть,

$$(8) \quad (AB) = (AE) + (EB) = (AE) + (CD),$$

что и желали имѣть.

Геометрическое вычитаніе обозначается алгебраическимъ знакомъ $-$, только векторы, надъ которыми производится дѣйствие, заключаются въ скобки: такъ, въ нашемъ случаѣ

$$(9) \quad (AE) = (AB) - (CD).$$

Если векторы AE , AB , CD означимъ V , V_1 , V_2 , а координаты ихъ соответственно X , Y , Z ; X_1 , Y_1 , Z_1 ; X_2 , Y_2 , Z_2 , то предъидущее геометрическое равенство

$$(10) \quad (V) = (V_1) - (V_2)$$

равносильно слѣдующимъ тремъ алгебраическимъ:

$$(11) \quad \begin{aligned} X &= X_1 - X_2; \\ Y &= Y_1 - Y_2, \\ Z &= Z_1 - Z_2. \end{aligned}$$

Выраженія (8) и (9) обнаруживаютъ, что въ геометрическихъ равенствахъ мы можемъ переносить члены изъ одной части въ другую по тому же правилу, какъ и въ алгебраическихъ. Такъ какъ сумма противоположныхъ векторовъ V_1 и V_2 , очевидно, равна нулю, т. е. даетъ векторъ длина котораго равна нулю, то изъ предъидущаго вытекаетъ обозначеніе

$$(V_1) = - (V_2),$$

что согласуется съ (5).

Замѣтимъ еще слѣдующее свойство операций, называемыхъ геометрическимъ сложеніемъ или вычитаніемъ если все векторы, надъ коими производится операція, увеличимъ или уменьшимъ въ одно и то же число разъ, то и результатъ операціи т. е. сумма или разность) увеличится или уменьшится въ то же число разъ, но направленія своего не измѣнитъ. Это вытекаетъ изъ подобія фигуръ, при помощи которыхъ производится построеніе для векторовъ неизмѣненныхъ и увеличенныхъ или уменьшенныхъ. Такъ, напр., пусть изъ вектора AB (фиг. 4) мы вычли векторъ (CD) ; разность представилась векторомъ AE . Если же вмѣсто векторовъ AB и (CD) возьмемъ въ полтора раза меньшіе векторы AB' и $(C'D')$,

то и равенство AE' будетъ въ полтора раза меньше прежней AE , но параллельна ей, какъ это слѣдуетъ изъ подобія треугольниковъ ABE и $AB'E'$.

5. Разложение вектора. Составляющіе векторы. Геометрическое вычитаніе представляетъ собою частный случай операціи болѣе общаго характера, носящей названіе разложенія вектора. Разложить данный векторъ это значитъ представить его, какъ сумму нѣсколькихъ векторовъ, называемыхъ его составляющими. Условія, при которыхъ производится разложеніе, могутъ быть крайне разнообразны. Всего чаще даются направленія составляющихъ. Если число данныхъ направленій превышаетъ три, задача становится неопредѣленною. Когда направленій три (не лежащихъ въ одной плоскости), составляющіе векторы будутъ ребрами параллелепипеда, диагональю котораго служитъ данный векторъ. При двухъ данныхъ направленіяхъ задача возможна лишь въ томъ случаѣ, когда эти направленія лежатъ въ одной плоскости съ даннымъ векторомъ, и тогда некое составляющее будетъ стороною параллелограмма, диагональю коего служитъ данный векторъ.

Векторы приложенные.

6. Опредѣленіе приложеннаго вектора. Векторы эквивалентные и прямопротивоположные. Векторомъ приложеннымъ называется отрезокъ данной длины и даннаго направленія, лежащій на данной прямой. Эту прямую называють основаніемъ вектора. Иначе можно сказать векторъ приложенный—это векторъ, лежащій на данной прямой.

Два приложенныхъ вектора равной длины и одинаковаго направленія, лежаще на общемъ основаніи, носятъ названіе эквивалентныхъ или равносильныхъ.

Два приложенныхъ вектора равной длины, лежащіе на одномъ и томъ же основаніи, но противоположно направленныя, называются прямопротивоположными.

7. Координаты приложеннаго вектора. Для опредѣленія приложеннаго вектора надо задать его длину l и ту прямую, на которой онъ лежитъ. Положеніе прямой опредѣляется четырьмя независимыми другъ отъ друга величинами, напр., четырьмя коэффициентами: p, q, r и s , въ уравненіяхъ проекцій прямой на координатныя плоскости:

$$y = px + q; \quad z = rx + s.$$

Такимъ образомъ число независимыхъ другъ отъ друга величинъ, опредѣляющихъ приложенный векторъ или, иначе, число

независимыхъ координатъ приложеннаго вектора равняется пяти. Какъ выбрать эти координаты, зависитъ отчасти отъ нашего произвола. Напр., по предыдущему, за координаты можемъ взять величины l, p, q, r и s , но такое задание будетъ не однозначнo однимъ и тѣмъ же значеніямъ l, p, q, r и s соответствуютъ два вектора прямопротивоположныхъ). Приложенный векторъ опредѣлится однозначнo, если за координаты возьмемъ три проекціи его на координатныя оси и двѣ координаты слѣда основанія на какой либо координатной плоскости.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ задавать приложенный векторъ V шестью координатами: тремя проекціями вектора X, Y, Z на координатныя оси и тремя координатами какой либо точки, лежащей на основаніи. Эту точку мы будемъ называть точкою приложенія вектора и обыкновенно будемъ предполагать, что она совпадаетъ съ его началомъ.

Такъ какъ число выбранныхъ нами координатъ превышаетъ на единицу число независимыхъ, то или эти координаты связаны нѣкоторымъ уравненіемъ, или одна изъ нихъ остается неопредѣленною. Очевидно, въ нашемъ случаѣ имѣеть мѣсто второе обстоятельство одной изъ координатъ точки приложенія для того же самаго вектора мы можемъ дать произвольное значеніе. Такъ, координаты

$$(12) \quad X, Y, Z, x, y, z$$

и координаты

$$(13) \quad X, Y, Z, \xi, \eta, \zeta$$

опредѣляютъ одинъ и тотъ же приложенный векторъ, если только соблюдено соотношеніе

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \xi & \eta & \zeta \\ X & Y & Z \end{array} = \text{const.}$$

Ясно само собою, что при переходѣ отъ значеній координатъ (12) къ значеніямъ (13) можно одной изъ величинъ ξ, η, ζ дать произвольно выбранное значеніе*). Такъ, координатъ z вектора

$$1, 2, 3, 1, 2, 3$$

*) Исключеніе имѣеть мѣсто только тогда, когда какой либо изъ знаменателей (14) обращается въ нуль, напр. X : въ такомъ случаѣ координата ξ не можетъ измѣняться.

можемъ дать значеніе 0; тогда найдемъ

$$1, 2, 3, 0, 0, 0;$$

или -6 ; тогда получимъ

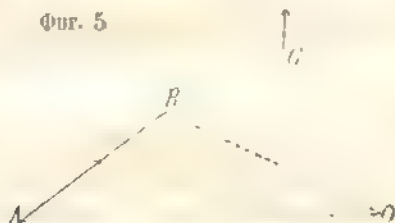
$$1, 2, 3, -2, -4, 6$$

и т. д. Соотношеніе (14) при текущихъ координатахъ ξ , η , ζ представляетъ собою уравненіе основанія.

Координаты эквивалентныхъ векторовъ всегда могутъ быть сдѣланы одинаковыми.

8. Моментъ приложеннаго вектора около точки (полюса). Пусть мы имѣемъ (фиг. 5) приложенный векторъ AB и какую либо точку или, какъ будемъ говорить, полюсъ O . Построимъ треугольникъ, имѣющий вершину въ O , а основаніемъ данный векторъ AB . Въ этомъ треугольникѣ будемъ различать двѣ стороны

Фиг. 5



лицевую и изнанку. Отличить одну сторону отъ другой можемъ слѣд. образомъ. Станемъ въ плоскости треугольника вращать прямую, соединяющую полюсъ съ началомъ вектора, до совпаденія ея съ прямою, проходящею черезъ полюсъ и конецъ вектора; при томъ такъ вращать, чтобы точка встрѣчи прямой и вектора двигалась по направленію вектора. Для наблюдателя, стоящаго внѣ плоскости треугольника, это вращеніе будетъ казаться происходящимъ по часовой стрѣлкѣ (по солнцу) или противъ нея въ зависимости отъ того, на какую сторону треугольника онъ смотритъ. Мы условимся считать сторону треугольника лицевой, если, глядя на нее, наблюдатель увидитъ вращеніе происходящимъ по стрѣлкѣ часовой. Векторъ G , пропорціональный площади треугольника, перпендикулярный къ его плоскости и направленный отъ изнанки къ лицевой сторонѣ, называется моментомъ данного приложеннаго вектора около данного полюса. Обыкновенно коэффициентъ пропорціональности принимается равнымъ двумъ, и тогда численно моментъ равняется произведенію изъ длины вектора на расстоя-

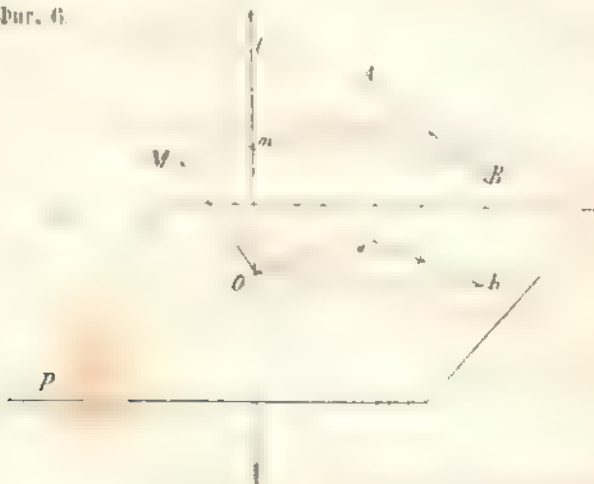
не основания отъ полюса, или, какъ говорятъ, на плечо вектора около полюса.

Очевидно, эквивалентные векторы имѣютъ равные, а прямо противоположные векторы — противоположные моменты около любого полюса.

Моментъ вектора отличнаго отъ нуля можетъ равняться нулю только около полюса, лежащаго на основаніи.

9. Моментъ приложеннаго вектора около оси. Прямая, на которой означено направление, называется осью. Положимъ, намъ даны (фиг. 6 и 7) приложенный векторъ AB и некоторая ось l . Проведемъ какую либо плоскость P , перпендикулярную къ l . Моментъ проекціи ab вектора AB на эту плоскость около слѣда O оси l на той же плоскости называется моментомъ вектора AB

Фиг. 6.



около оси l . Ясно само собою, что разсматриваемый моментъ вовсе не зависитъ отъ положенія плоскости P , лишь бы она была перпендикулярна къ l . Моментъ вектора около какой либо оси всегда параллеленъ этой оси, хотя можетъ быть направленъ или въ одну съ нею сторону или въ противоположную. Въ первомъ случаѣ моментъ считается положительнымъ, во второмъ отрицательнымъ *).

*) То же условіе, то же относительно проекціи вектора на ось, см. прим. къ § 2.

Нетрудно показать, что моментъ приложеннаго вектора около оси равняется проекціи на ось момента вектора около какого либо полюса на оси. Пусть (фиг. 6 и 7) OM и O_m моменты векторовъ AB и ab около O , тогда $O_m = OM \cos \varphi$, гдѣ φ уголъ между OM и l , такъ какъ съ одной стороны

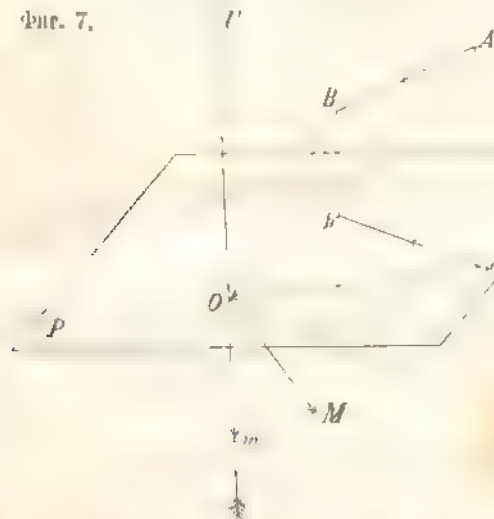
$$\text{Площ. } \Delta Oab = \pm \text{Площ. } \Delta OAB \cdot \cos \varphi;$$

а съ другой стороны

$$O_m = \pm 2 \text{ Площ. } \Delta Oab,$$

причемъ одновременно должны быть сохранены въ обѣихъ формулахъ либо два верхнихъ, либо два нижнихъ знака

Фиг. 7.

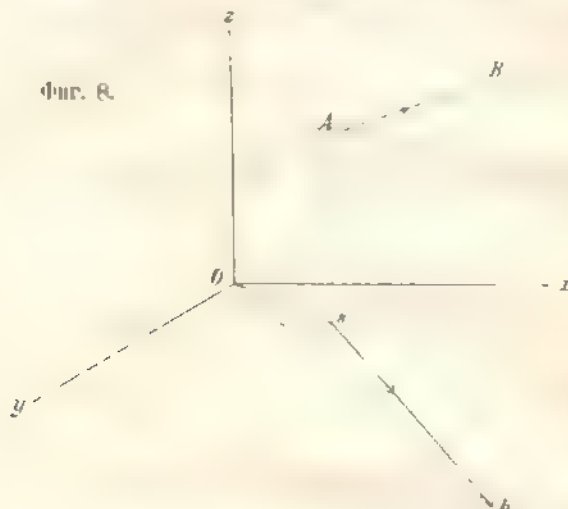


$OM = \text{Пл. } OAB$
 $O_m = \text{Пл. } Oba$
 $O_m = OM \cos \varphi$
 $O_m = \text{Пл. } OAB$
 $O_m = OM \cos \varphi$

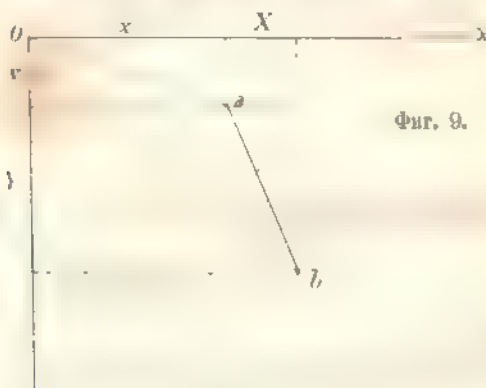
Отсюда вытекаетъ слѣдующее: если черезъ какой либо полюсъ проведемъ три взаимно перпендикулярныя оси, то моментъ любого вектора около этого полюса равенъ геометрической суммѣ моментовъ того же вектора около трехъ проведенныхъ осей, такъ какъ въ § 3 всякій векторъ представляетъ собою геометрическую сумму трехъ координатъ, т. е. проекцій на три взаимно ортогональныя оси. Если же построенныя оси не взаимно перпендикулярны, а образуютъ другъ съ другомъ косые углы, то вышеприведенное положеніе невѣрно*).

* Если тогда отъ полюса отложимъ на осяхъ векторы, изображающіе моменты данного вектора около построенныхъ осей, то моментъ около полюса будетъ служить діаметромъ сферы, проходящей черезъ полюсъ и концы этихъ векторовъ.

10 Аналитическое выраженіе для моментовъ приложеннаго вектора около осей координатъ. Вычислимъ теперь моменты приложеннаго вектора около осей координатъ по заданнымъ координатамъ



X, Y, Z, x, y, z . Пусть (фиг. 8 и 9) точка приложенія совпадетъ съ началомъ вектора. Искомые моменты около Ox, Oy и Oz



означимъ соответственно L, M, N . Начнемъ съ вычисления N . Проекція a начала вектора на плоскость xOy будетъ имѣть сво-

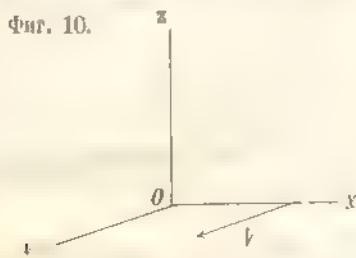
ими координатами: x, y ; а проекція b конца: $x + X; y + Y$; слѣд., удвоенная площадь треугольника Oab , по известной формулѣ аналитической геометріи, выразится такъ:

$$2 \text{ площ. } \Delta Oab = \pm [(y + Y)x - (x + X)y] = \pm (Yx - Xy);$$

откуда

$$N = \pm (Yx - Xy).$$

Чтобы опредѣлить, который изъ двухъ знаковъ долженъ быть сохраненъ, приложимъ нашу формулу къ частному случаю. Возьмемъ векторы: $O, Y, O, x, O, 0$; Y и x положительны. Моментъ такого вектора *) (фиг. 10) по § 8 положителенъ, слѣд., въ предыдущей формулѣ надо сохранить знакъ плюсь. Хотя мы убѣди-



лись въ этомъ для частнаго случая, но наше заключеніе будетъ справедливо и вообще, такъ какъ моментъ непрерывно мѣняется съ измѣненіемъ координатъ вектора.

Изъ выраженія для N съ помощью круговой подстановки найдемъ выраженія для L и M . Такимъ образомъ получаемъ:

$$L = Zy - Yz; \quad M = Xz - Zx, \quad N = Yx - Xy. \quad (15)$$

Если бы точка приложенія не совпадала съ началомъ вектора, то по (14) координаты ξ, η, ζ начала выразились бы такъ:

$$\xi = x + \lambda X; \quad \eta = y + \lambda Y; \quad \zeta = z + \lambda Z;$$

гдѣ λ означена общая величина отношеній. Подстановка ξ, η, ζ въ формулы (15), вмѣсто x, y, z , очевидно, не измѣнила бы ихъ вида.

*. Относительно системы осей предполагается всегда, что для наблюдателя стоящаго вдоль оси Oz : такъ, чтобы направленіе оси шло отъ него къ началу, и смотрящаго вдоль оси Ox , ось Oy идетъ слева направо.

$$XZy - YXz = Zy - Yz$$

По выраженіямъ (15) легко найти моменты даннаго вектора около осей параллельныхъ координатнымъ, но проходящихъ черезъ точку A съ координатами a, b, c . Для этого перенесемъ начало въ точку A , не измѣняя направленія осей; тогда новыя координаты вектора: X', Y', Z', x', y', z' будутъ такъ связаны съ прежними

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z;$$

$$x' = x - a; \quad y' = y - b; \quad z' = z - c.$$

Примѣняя (15) для моментовъ $L^{(A)}, M^{(A)}, N^{(A)}$ около новыхъ осей, получимъ выраженія:

$$L^{(A)} = Z'y' - Y'z', \quad M^{(A)} = X'z' - Z'x', \quad N^{(A)} = Y'a' - X'y'.$$

откуда, возвращаясь къ прежнимъ координатамъ, и найдемъ:

$$(16) \quad \begin{aligned} L^{(A)} &= Z(y - b) - Y(z - c); & M^{(A)} &= X(z - c) - Z(x - a); \\ N^{(A)} &= Y(x - a) - X(y - b). \end{aligned}$$

11. Аналитическое выраженіе для момента приложеннаго вектора около полюса. Всякій векторъ можно разсматривать какъ геометрическую сумму проекцій его на три взаимно перпендикулярныя оси (§ 3); слѣд., по § 9, моментъ $G^{(A)}$ даннаго приложеннаго вектора (X, Y, Z, x, y, z) около полюса $A(a, b, c)$ представляется какъ геометрическая сумма моментовъ этого вектора около осей, проходящихъ черезъ A и параллельныхъ координатнымъ. По (16) координаты вектора $G^{(A)}: G_x^{(A)}, G_y^{(A)}, G_z^{(A)}$ представятся такъ:

$$(17) \quad \begin{aligned} G_x^{(A)} &= L^{(A)} = Z(y - b) - Y(z - c); \\ G_y^{(A)} &= M^{(A)} = X(z - c) - Z(x - a); \\ G_z^{(A)} &= N^{(A)} = Y(x - a) - X(y - b). \end{aligned}$$

Если точка A совпадаетъ съ началомъ координатъ, то моментъ G будетъ имѣть своими координатами:

$$(18) \quad G_x = Z(y - b) - Y(z - c); \quad G_y = X(z - c) - Z(x - a); \quad G_z = Y(x - a) - X(y - b)$$

а величина его найдется по формулѣ:

$$(19) \quad G^2 = (Zy - Yz)^2 + (Xz - Zx)^2 + (Yx - Xy)^2.$$

12. Аналитическое выраженіе момента приложеннаго вектора около произвольной оси. По § 9 моментъ $K^{(A)}$ даннаго приложен-

наго вектора (X, Y, Z, x, y, z) около оси U , проходящей через точку $A(a, b, c)$ и образующей съ осями углы α, β, γ равняется проецин на ось момента этого вектора около полюса A , т. е. по (17):

$$K^U = [Z(y - b) - Y(z - c)] \cos \alpha + [X(z - c) - Z(x - a)] \cos \beta + [Y(x - a) - X(y - b)] \cos \gamma. \quad (20)$$

13. Новая координата приложеннаго вектора. Вместо того, что бы видать приложенный векторъ его проецинами на три координатныя оси и координатами точки приложенія, мы можемъ опредѣлять его другими шестью величинами — тремя проецинами на оси и тремя моментами около координатныхъ осей. Новыя координаты слѣд. будутъ: X, Y, Z, L, M, N . Число ихъ снова на единицу превышаетъ число независимыхъ координатъ вектора, ни одна изъ нихъ, очевидно, не можетъ быть неопредѣленною, слѣд. между ними должна быть некоторая зависимость. Дѣйствительно, изъ выражений (15) нетрудно видѣть, что

$$XL + YM + ZN = 0. \quad (21)$$

Геометрически это равенство выражаетъ перпендикулярность вектора къ своему моменту около начала координатъ.

Отъ прежней системы координатъ вектора къ новой легко перейдемъ съ помощью уравненій (15). Тѣ же уравненія служатъ для обратнаго перехода, только одной изъ координатъ точки приложенія надо дать опредѣленное значеніе, выбранное по нашему произволу.

14. Взаимный моментъ двухъ векторовъ. Взаимнымъ моментомъ двухъ векторовъ называется произведеніе изъ длины одного изъ векторовъ на моментъ другого около осн. служащей основаніемъ первому и совпадающей съ нимъ по направленію. Численно взаимный моментъ равняется удвоенному объему тетраэдра, построеннаго на данныхъ векторахъ какъ на противоположныхъ ребрахъ. Объему этому должно приписать знакъ положительный или отрицательный в. зависимости отъ знака момента, входящаго въ составъ взаимнаго момента двухъ векторовъ.

Если данныя векторы (фиг. 11) AB и CD означимъ черезъ V_1 и V_2 , моментъ вектора V_1 около основанія вектора V_2 черезъ G_2 , моментъ вектора V_2 около основанія V_1 черезъ G_1 , объемъ тетраэдра, построеннаго на V_1, V_2 черезъ W , и наконецъ для сокращаемаго взаимнаго момента выберемъ ось (V_1, V_2) , то намъ придется убедиться въ справедливости равенствъ:

$$(V_1, V_2) = (V_2, V_1) = V_1 G_{21} = V_2 G_{11} = \pm 6 W. \quad (22)$$

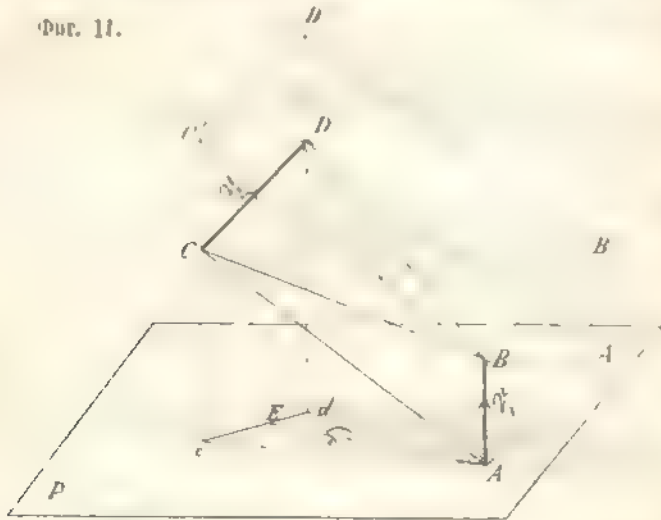
Вычислимъ сначала моментъ G_{21} . Если плоскость P перпендикулярна AB и проходитъ черезъ A , то искомый моментъ равняется удвоенной

площади треугольника Acd , где cd проекция CD на плоскость P . Но

$$2. \text{Площ. } \Delta Acd = cd \cdot AE = cd \cdot \delta;$$

здесь $AE = \delta$ перпендикуляр, опущенный из A на cd , эта линия, очевидно, служит кратчайшимъ разстояниемъ между векторами AB и CD .

Фиг. 11.



Далѣе $cd = CD \cdot \sin \alpha$, гдѣ α уголъ между направлениемъ векторовъ CD и AB ; слѣдъ по принятымъ обозначениямъ

$$V_1 G_{21} = \pm V_1 V_2 \delta \sin (V_1 V_2).$$

Произведение $V_1 V_2 \sin (V_1 V_2)$ представляетъ собою площадь параллелограмма $ABA'B'$, если AA' параллельно CD . Построимъ на этомъ параллелограммѣ, какъ на основаніи, параллелепипедъ, имѣющій боковымъ ребромъ прямую AC тогда отрезокъ δ будетъ служить высотой этого параллелепипеда. А потому

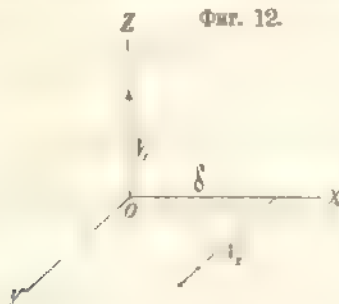
$$V_1 G_{21} = \pm V_1 V_2 \delta \sin (V_1 V_2) = \pm \delta W;$$

такъ какъ тетраэдръ, построенный на векторахъ, очевидно, составляетъ шестую часть вышеупомянутого параллелепипеда. Выразите $V_1 V_2 \delta \sin (V_1 V_2)$ симметрично относительно V_1 и V_2 ; отсюда заключаемъ о равенствѣ:

$$V_1 G_{21} = \pm V_2 G_{12}.$$

Для опредѣленія знака рассмотримъ частный случай. Пусть (фиг. 12) векторъ V_1 имѣть точку приложенія въ началѣ координатъ и направленъ по Ox , а векторъ V_2 имѣть точку приложенія на положительной половинѣ

Отъ въ разстояніи δ отъ начала и направленъ по Ox ; тогда $V_1 G_2 = + V_1 V_2 \delta$ и $V_2 G_1 = + V_2 V_1 \delta$; слѣд., въ вышеприведенной формулѣ надо сохранить по



ложительный знакъ. Такимъ образомъ равенства (22) доказаны во всѣхъ своихъ частяхъ.

15. Аналитическое выраженіе для взаимнаго момента векторовъ. Изъ аналитической геометріи намъ извѣстно такое выраженіе для объема W тетраэдра, имѣющаго свои вершины въ точкахъ: $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \xi_3, \eta_3, \zeta_3; \xi_4, \eta_4, \zeta_4$; —

$$6W = \pm \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

Пусть (фиг. 11) векторы V_1 или AB , V_2 или CD , взаимный моментъ которыхъ желательнo вычислить, заданы своими координатами $X_1, Y_1, Z_1, x_2, y_2, z_2, X_2, Y_2, Z_2, x_3, y_3, z_3$. Тогда координаты вершинъ тетраэдра $ABCD$, построеннаго на этихъ векторахъ, будутъ слѣдующія:

$$\begin{aligned} A: \xi_1 &= x_1; \eta_1 = y_1; \zeta_1 = z_1; \\ B: \xi_2 &= x_1 + X_1; \eta_2 = y_1 + Y_1; \zeta_2 = z_1 + Z_1; \\ C: \xi_3 &= x_2; \eta_3 = y_2; \zeta_3 = z_2; \\ D: \xi_4 &= x_2 + X_2; \eta_4 = y_2 + Y_2; \zeta_4 = z_2 + Z_2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значенія въ предыдущее выраженіе, найдемъ

$$6W = \pm \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 \end{vmatrix}$$

Вычитая изъ второй строки опредѣлителя первую, а изъ четвертой третью, значительно упростимъ его и такимъ образомъ по § 14 получимъ окончательно:

$$(23) \quad (V_1 V_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Убѣдиться въ томъ, что здѣсь долженъ быть сохраненъ знакъ плюс, можно совершенно такимъ же образомъ, какъ мы это сдѣлали въ § 14, применивъ формулу къ тому же самому частному случаю.

Если предыдущий опредѣлитель разложить по элементамъ перваго столбца, то получимъ по (15) выраженіе для $(V_1 V_2)$ въ другихъ координатахъ векторовъ:

$$(24) \quad (V_1 V_2) = X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1,$$

Система векторовъ.

16. Система векторовъ. Главный векторъ. Координаты системы. Группу n векторовъ V_1, V_2, \dots, V_n , если разсматриваемъ ихъ всѣхъ одновременно, будемъ называть системою векторовъ. Векторъ V , представляющій собою геометрическую сумму данныхъ векторовъ, носить названіе главнаго вектора системы. Координаты главнаго вектора X, Y, Z , связанныя съ координатами отдѣльныхъ векторовъ равенствами (7), называются координатами системы; эти величины характеризуютъ собою систему. Системы, имѣющія одинаковыя координаты, т. е. имѣющія геометрически равные главные векторы, сами считаются геометрически равными. Изъ опредѣленія операціи геометрическаго сложенія вытекаетъ, что главный векторъ не зависитъ вовсе отъ положенія осей координатъ.

Система приложенныхъ векторовъ.

17. Система приложенныхъ векторовъ. Главный моментъ. Координаты системы. Группа изъ n приложенныхъ векторовъ V_1, V_2, \dots, V_n , если всѣ векторы разсматриваются одновременно, называется системою приложенныхъ векторовъ. Такъ какъ каждый приложенный векторъ V характеризуется двумя неприменными векторами: X, Y, Z и L, M, N , (см. § 13), то система приложенныхъ векторовъ равносильна двумъ системамъ

неприложенныхъ векторовъ. Поэтому система приложенныхъ векторовъ характеризуется не однимъ, а двумя главными векторами: главнымъ векторомъ R для системы X_i, Y_i, Z_i ($i=1, 2, \dots, n$) и главнымъ векторомъ G^0 для системы L_i, M_i, N_i ($i=1, 2, \dots, n$). Первый векторъ сохраняетъ свое названіе главнаго вектора системы, а второй называется главнымъ моментомъ системы около начала координатъ. Координаты: $X, Y, Z; L, M, N$, — этихъ двухъ векторовъ называются координатами системы приложенныхъ векторовъ. По (7) и (15) координаты системы такъ зависятъ отъ координатъ отдѣльныхъ векторовъ:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i; & Y &= \sum_{i=1}^n Y_i; & Z &= \sum_{i=1}^n Z_i; \\ L &= \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n (Z_i y_i - Y_i z_i); \\ M &= \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n (X_i z_i - Z_i x_i); \\ N &= \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n (Y_i x_i - X_i y_i). \end{aligned} \quad (25)$$

18. Зависимость координатъ системы отъ выбора полюса.

Если вмѣсто начала координатъ возьмемъ за полюсъ точку (a, b, c) , то главный векторъ R останется безъ измѣненія (см. § 17), а главный моментъ около новаго полюса G^A (L^A, M^A, N^A), говоря, не будетъ равняться прежнему G^0 (L, M, N), такъ какъ эти суммируемые моменты G_i^0 (L_i, M_i, N_i) измѣнятся и перейдутъ въ G_i^A (L_i^A, M_i^A, N_i^A).

Дѣйствительно, по (17):

$$\begin{aligned} L_i^A &= Y_i z_i + Y_i c - Z_i b = L_i - Z_i b + Y_i c; & M_i^A &= M_i - X_i c + Z_i a; \\ N_i^A &= N_i - Y_i a + X_i b. \end{aligned}$$

А потому

$$L^A = \sum_{i=1}^n L_i^A = \sum_{i=1}^n L_i + b \sum_{i=1}^n Z_i + c \sum_{i=1}^n Y_i = L + bZ + cY;$$

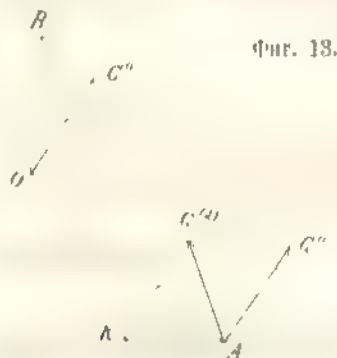
$$(26) \quad M^A = M - cX + aZ; \quad N^A = N - aY + bX.$$

Двучлены, стоящіе въ правыхъ частяхъ равенствъ: $-bZ + cY$, $-cX + aZ$, $-aY + bX$, очевидно, представляютъ собою моменты около осей координатъ вектора: X , Y , Z , $-a$, $-b$, $-c$. Если же мы замѣтимъ, что по отношенію къ системѣ осей параллельныхъ прежнимъ, но имѣющихъ начало въ точкѣ A , координаты прежняго начала будутъ именно $-a$, $-b$, $-c$, то легко увидимъ, что разсматриваемые двучлены служатъ координатами момента K главнаго вектора R , приложеннаго къ началу координатъ, около точки A . Такимъ образомъ, выше написанныя три алгебраическихъ равенства приводятъ къ такому геометрическому:

$$(G^A) = (G^0) + (K);$$

т. е. главный моментъ около новаго полюса равняется геометрической суммѣ главнаго момента около прежняго полюса и момента главнаго вектора системы, приложеннаго къ прежнему полюсу, относительно новаго.

Пусть, напр., (фиг. 13) G^0 главный моментъ системы около



O , R главный векторъ системы, K моментъ вектора R , приложеннаго къ O , относительно A ; тогда главный моментъ системы G^A около A будетъ діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ G^0 и K .

Изъ доказаннаго соотношенія вытекаетъ, что геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ съ геометрически равными моментами служить прямая, параллельная главному вектору системы.

Если первоначально полюсомъ служила не точка O (начало координатъ), а точка $A(a, b, c)$ и затѣмъ за полюсъ взята $P(x, y, z)$, то по (26), перенеся начало въ A , мы нашли бы такія выраженія для главнаго момента въ P :

$$\begin{aligned} L^P &= L^A + Y(z - c) - Z(y - b); \\ M^P &= M^A + Z(x - a) - X(z - c); \\ N^P &= N^A - X(y - b) - Y(x - a). \end{aligned} \quad (27)$$

19. Инварианты системы векторовъ. Разложимъ (§ 5) главный моментъ G^A системы приложенныхъ векторовъ около какого либо полюса A на два составляющихъ—по направленію главнаго вектора R и по направленію перпендикулярному къ главному вектору. Первый составляющій векторъ назовемъ H^A , второй F^A . Составимъ выраженіе для H^A , пользуясь равенствами (26).

$$\begin{aligned} H^A &= G^A \cos(G^A R) = \frac{1}{R} (L^A X + M^A Y + N^A Z) = \\ &= \frac{1}{R} (LX + MY + NZ) = G^0 \cos(G^0 R) = H; \end{aligned}$$

Въ полученное выраженіе вовсе не входятъ координаты точки A , поэтому для другого какого-нибудь полюса B мы нашли бы точно такое же выраженіе, слѣд.:

$$H^A = H^B = H;$$

т. е. проекція главнаго момента системы на направленіе главнаго вектора не зависитъ отъ положенія полюса.

Такъ какъ и на главный векторъ не влияетъ выборъ полюса, то выраженіе

$$RH^A = RH = XL + YM + ZN \quad (28)$$

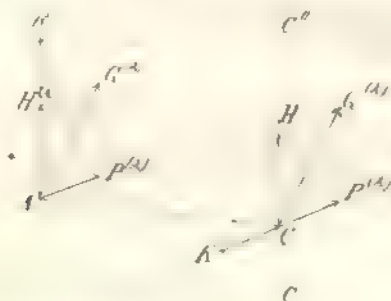
не зависитъ ни отъ положенія полюса, ни, конечно, отъ ориентировки координатныхъ осей; поэтому оно носитъ названіе инварианта системы векторовъ. Другимъ инвариантомъ является выраженіе

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

къ которому мы уже упоминали выше (§ 16).

20. **Центральная ось системы векторовъ.** Перемѣна полюса вліяетъ лишь на составляющій векторъ главнаго момента P^A , перпендикулярный къ главному вектору. Посмотримъ, нельзя ли выбрать полюсъ такъ, чтобы этотъ векторъ P^A обратился въ нуль. Тогда, очевидно, главный моментъ G^A около взятаго полюса будетъ имѣть наименьшую возможную величину H и по направленію совпадетъ съ основаніемъ вектора H .

Пусть (фиг. 14) для полюса A построены главный векторъ R и главный моментъ G^A ; разложимъ этотъ моментъ на два вектора: H^A по направленію R и P^A по направленію къ R перпендикулярному. Затѣмъ отступимъ отъ плоскости, содержащей векторы R и G^A , по перпендикуляру AC къ ней на разстояніе $AC = d = \frac{P^A}{R}$, при томъ въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, смотрящаго на плоскость изъ точки C и стоящаго такъ, что направленіе R совпадаетъ съ направленіемъ отъ ногъ къ головѣ, векторъ P^A казался идущимъ слѣва направо. Тогда точка C и будетъ искомымъ полюсомъ. Дѣйствительно, по предыдущему, главный моментъ G^C



Фиг. 14.

для полюса C получится какъ сумма момента G^A и момента K вектора R около полюса C . Этотъ моментъ по своей величинѣ равенъ Rd , т. е., по условію, равенъ P^A , но по направленію прямопротивоположенъ, слѣд. геометрическая сумма G^A и K дастъ только векторъ $H^C = H^A = H$; поэтому

$$G^C = H,$$

что и желали получить.

Полюсовъ подобныхъ C безчисленное множество всѣ они лежать (§ 18) на прямой $C'C''$, параллельной главному вектору. Прямая эта носить названіе центральной оси системы векторовъ.

21. Уравнение центральной оси. Полученный въ предыдущемъ параграфѣ результатъ подтвердимъ аналитическимъ путемъ.

Ставемъ искать координаты полюса (a, b, c) изъ того условия, чтобы для него главный моментъ системы имѣлъ возможно наименьшую величину. По (26) вопросъ сводится къ опредѣленію минимума функціи отъ трехъ переменныхъ a, b и c .

$$[(c^2)^2 - (L - Zb + Yc)^2 + (M - Xc + Za)^2 + (N - Ya + Xb)^2].$$

По известнымъ правиламъ приравняемъ нулю производныя по a, b и c :

$$Z(M - Xc + Za) - Y(N - Ya + Xb) = 0;$$

$$X(N - Ya + Xb) - Z(L - Zb + Yc) = 0;$$

$$Y(L - Zb + Yc) - X(M - Xc + Za) = 0.$$

Одного взгляда на эти уравнения достаточно, чтобы видѣть, что одно изъ нихъ служить слѣдствіемъ остальныхъ двухъ. Заменяя ихъ равенствомъ такнхъ отношеній

$$\frac{L - Zb + Yc}{X} = \frac{M - Xc + Za}{Y} = \frac{N - Ya + Xb}{Z},$$

во (26) видимъ, что

$$\frac{L^2}{X} = \frac{M^2}{Y} = \frac{N^2}{Z},$$

т. е. направление главнаго момента около искомаго полюса совпадаетъ съ направлениемъ главнаго вектора. Равенство двухъ послѣднихъ отношеній приводитъ къ уравненію

$$ZM - YN = X(Zc + Yb) - a(Z^2 + Y^2);$$

т. е. если $X^2 + Y^2 + Z^2$ замѣнимъ черезъ R^2 , къ такому выраженію

$$a = \frac{1}{R^2} (YN - ZM) = \frac{X}{R^2} (Xa + Yb + Zc)$$

$$= X \frac{YN - ZM}{R^2}$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$b = \frac{1}{R^2} (ZL - XN) = \frac{Y}{R^2} (Xa + Yb + Zc);$$

$$aR^2 = YN - ZM$$

$$c = \frac{1}{R^2} (XM - YL) = \frac{Z}{R^2} (Xa + Yb + Zc).$$

Изъ этихъ равенствъ, полагая

$$\alpha = \frac{1}{R^2} (YN - ZM); \quad \beta = \frac{1}{R^2} (ZL - XN); \quad \gamma = \frac{1}{R^2} (XM - YL);$$

получаемъ искомое уравненіе центральной оси:

$$(29) \quad \frac{a - \alpha}{X} = \frac{b - \beta}{Y} = \frac{c - \gamma}{Z}.$$

Это прямая, параллельная главному вектору и проходящая черезъ точку (α, β, γ) . Легко убѣдиться, что точка (α, β, γ) именно та самая ℓ , о которой была рѣчь въ предыдущемъ параграфѣ. Действительно, радиусъ векторъ этой точки перпендикуляренъ къ R и G^0 , такъ какъ

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0; \quad \alpha L + \beta M + \gamma N = 0.$$

Далѣе длина λ радиуса вектора находится изъ равенства

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{R^2} \{ (L^2 + M^2 + N^2) R^2 - (XL + YM + ZN)^2 \} - \\ &= \frac{1}{R^2} R^2 (G^0)^2 \sin^2 (RG^0), \end{aligned}$$

откуда по § 20

$$\lambda = \frac{1}{R} G^0 \sin (RG^0) = d.$$

Точно также и направленіе этого радиуса вектора совпадаетъ съ указаннымъ въ томъ же параграфѣ. Пусть положительное направленіе O совпадаетъ съ ℓ^0 , а плоскость zOy проходитъ черезъ R , такъ что $L = 0$, $M = 0$, $N > 0$, $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Тогда $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{YN}{R} > 0$, т. е. радиусъ векторъ, совпадаетъ съ положительною половиной $O\ell$, что и подтверждаетъ вышесказанное.

22. Распределеніе главныхъ моментовъ въ пространствѣ. На основаніи предыдущаго мы можемъ составить себѣ ясное представленіе о томъ, какъ расположены въ пространствѣ моменты около различныхъ полюсовъ.

Величина момента G^A вокругъ точки A , отстоящей отъ центральной оси на разстояніи d , по §§ 18 и 20 представится такъ:

$$G^A = \sqrt{H^2 + d^2 R^2};$$

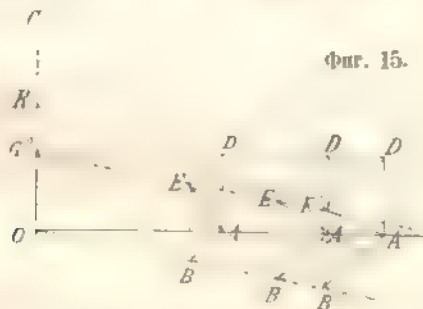
слѣд. геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ, для которыхъ моменты равны по своей величинѣ, но могутъ отличаться по направленію, служить цилиндръ вращенія, ось котораго совпадаетъ съ центральной осью системы. Каждая изъ производящихъ этого цилиндра служитъ геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ съ геометрически равными моментами. Моменты вокругъ полюсовъ, лежащихъ на ортогональномъ сѣченіи цилиндра, расположены по производящимъ однополаго гиперболоида вращенія. Окружность, представляющая собою это ортогональное сѣченіе, служитъ горлою гиперболоида.

Тангенсъ угла φ , подъ которымъ направленіе момента G^A наклонено къ центральной оси, выражается такъ:

$$\tan \varphi = \frac{Rd}{H}.$$

слѣд. моментъ по мѣрѣ удаленія полюса отъ оси стремится стать перпендикулярнымъ къ оси.

Въ заключеніе рассмотримъ, какъ мѣняется направленіе моментовъ для полюсовъ, лежащихъ на прямой, перпендикулярной къ центральной оси въ данной на ней точкѣ. Пусть OC (фиг. 15)



— центральная ось системы, R и G^O главный векторъ и главный моментъ для точекъ на этой оси и пусть прямая OI перпендикулярна къ OC . Моментъ G^A около A выразится диагональю AE прямоугольника $ABED$, у котораго сторона AD геометрически равна

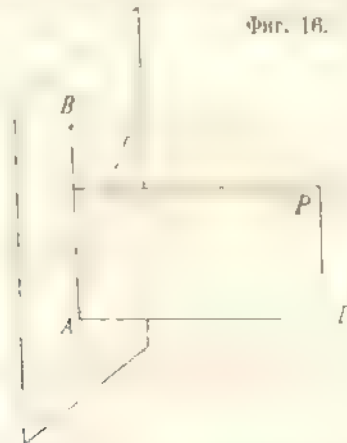
σ^n , а сторона AB — R . OA плоскость прямоугольника перпендикулярна къ OA . Для другой точки A' на той же прямой OA должны также найти двоица прямоугольника $E'D'A'B'$, причемъ $(A'D') = (\sigma^n)$; $A'B' = R$. OA' Очевидно,

$$\begin{aligned} AB &= OA \\ A'B' &= OA' \end{aligned}$$

сидъ линии OBV' , а потому и $\sigma^0 EF'$ прямая. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что направленія моментовъ совпадаютъ съ производящими гиперболическаго параболоида, построеннаго на OA и $\sigma^0 E$.

До сихъ поръ мы предполагали, что ни главный векторъ, ни главный моментъ для точекъ центральной оси не равняются нулю. Если главный векторъ нуль, то для всѣхъ полюсовъ моменты геометрически равны. Если главный моментъ для точекъ на оси обращается въ нуль, то всѣ моменты перпендикулярны къ оси, т. е. φ всюду равно $\frac{\pi}{2}$.

23. Построеніе Пенселе. Мы уже имѣли найти положеніе центральной оси, если система векторовъ намъ задана своими координатами. Но, конечно, это не единственный способъ задания—такихъ способовъ безчисленное множество, наприм. система будетъ вполне определена, если въѣтны три главныхъ момента ея около трехъ данныхъ точекъ. Моменты эти не могутъ быть заданы произвольно, какъ увидимъ тайши. Мы рассмотримъ изящный геометрическій приемъ, данный Пенселе, для отысканія въ этомъ случаѣ центральной оси.



Фиг. 16.

Предварительно замѣтимъ, что, если известны направленія главнаго вектора AB (фиг 16) и главнаго момента AC для какого нибудь полюса A , то легко найти плоскость, въ которой должна лежать центральная ось.

По § 20 искомая линия параллельна главному вектору и перпендикулярна перпендикуляръ AD , восстановленный въ A къ плоскости SAB , слѣд. лежитъ въ плоскости P , проходящей черезъ AB и перпендикулярной къ плоскости SAB . Теперь задачу нашу легко решить. Направление главного вектора характеризуется тѣмъ, что проекція на него любого момента имѣетъ постоянную величину: слѣд., если изъ произвольной точки, какъ вершины, построимъ тетраэдръ съ боковыми ребрами геометрически равными тремъ даннымъ моментамъ, то высота этого тетраэдра, опущенная изъ той же вершины, и дастъ искомое направление. Затѣмъ по сказанному выше для двухъ данныхъ полюсовъ строимъ двѣ плоскости, содержащія централизованную ось; пересѣчение ихъ и будетъ искомая линия. Отсюда и видно, что мы не имѣемъ права задать всѣ три момента по произволу: плоскость, полученная тѣмъ же приемомъ для третьяго даннаго полюса, должна съ первыми двумя плоскостями пересѣчься по одной прямой.

Системы эквивалентныя.

24. Системы приложенныхъ векторовъ эквивалентныя между собою. Системы прямопротивоположныя. Системы эквивалентныя нулю. Двѣ системы приложенныхъ векторовъ называются эквивалентными между собою, если онѣ имѣютъ геометрически равные главный векторъ и главный моментъ для любого полюса. Для этого необходимо и достаточно (§ 18), чтобы у нихъ оказались равными главный векторъ и главный моментъ для одного только полюса.

Система приложенныхъ векторовъ, у которой главный векторъ и главный моментъ равны нулю, называется эквивалентною нулю. Примеромъ такой системы могутъ служить два прямопротивоположныхъ вектора.

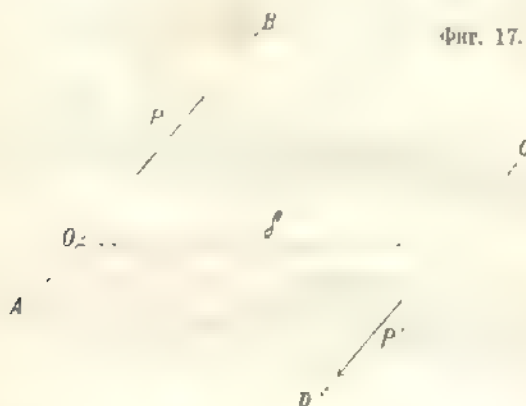
Двѣ системы приложенныхъ векторовъ, у которыхъ главный векторъ и главный моментъ противоположны для любого полюса, называются системами прямопротивоположными другъ другу. Для этого необходимо и достаточно, чтобы такимъ образомъ обладали главный векторъ и главный моментъ для одного какого либо полюса. Если въ данной системѣ векторы не векторы замѣнимъ прямопротивоположными, то, очевидно, новая система векторовъ будетъ прямопротивоположна прежней.

Если изъ двухъ или нѣсколькихъ системъ векторовъ составимъ одну систему сложную, то главный векторъ и главный моментъ сложной системы для какого нибудь полюса будутъ равняться метрической суммѣ главныхъ векторовъ и моментовъ отдельныхъ простыхъ системъ около того же полюса. Отсюда вытекаетъ, что если къ какой либо системѣ векторовъ присоединить систему эквивалентную нулю, то новая сложная система будетъ эквивалентна прежней. Соединеніе двухъ прямопротивоположныхъ си-

стемъ дать систему эквивалентную нулю. Наоборотъ, если систему эквивалентную нулю раздѣлить на двѣ, то получится двѣ прямо противоположныя системы.

Если двѣ системы приложенныхъ векторовъ S_1 и S_2 таковы, что сложная система изъ S_1 и системы, прямопротивоположной S_2 , или, наоборотъ, изъ S_2 и системы, прямопротивоположной S_1 , эквивалентна нулю, то системы S_1 и S_2 эквивалентны другъ другу.

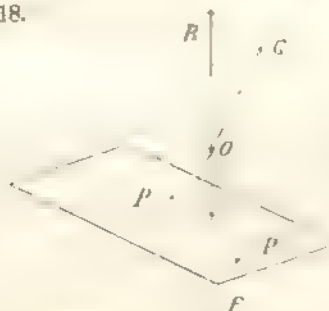
25. Простѣйшія системы приложенныхъ векторовъ. Пара векторовъ. Наиболее простою системою приложенныхъ векторовъ является система, состоящая только изъ одного вектора. Другая простая система получится, если мы возьмемъ два приложенныхъ вектора P и P' (фиг. 17), равныхъ по величинѣ, лежа-



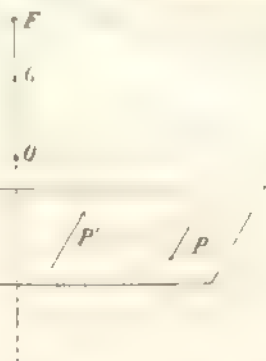
щихъ на параллельныхъ основаніяхъ AB и $C'D'$, но противоположно направленнхъ. Такая система носитъ названіе пары векторовъ. Главный векторъ для пары обращается въ нуль, а потому (§ 22) моментъ пары не зависитъ отъ положенія полюса. Если взять полюсъ O на основаніи AB одного изъ векторовъ, то непосредственно видимъ, что главный моментъ равенъ произведенію изъ общей величины векторовъ, скажемъ P , на расстояние между основаніями δ , называемое плечомъ пары. Но направленію моментъ пары перпендикуляренъ къ плоскости, содержащей данныя векторы (плоскости пары), и идетъ въ ту сторону, глядя съ которой на плоскость пары, увидимъ векторы ея направленными въ сторону движенія стрѣлки часовъ. Пары, лежащія въ параллельныхъ плоскостяхъ, эквивалентны между собою, если у нихъ равны произведенія изъ длины плеча на величину вектора и направленія моментовъ одинаковы.

26. Замята данной системы векторов простѣйшею, ей эквивалентною, при инвариантахъ отличныхъ отъ нуля. Введеніе въ разсмотрѣніе эквивалентныхъ системъ даетъ намъ возможность замѣнить одну систему векторовъ другими болѣе простыми или болѣе удобными въ какомъ либо отношеніи. Такъ напр., система, состоящая изъ нѣсколькихъ векторовъ съ общою точкою приложенія, можетъ быть замѣнена однимъ векторомъ, равнымъ геометрической суммѣ данныхъ векторовъ и приложеннымъ къ той же точкѣ

Фиг. 18.



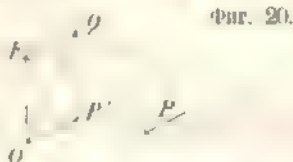
Разсмотримъ сначала общій случай замѣны данной системы простѣйшею. Пусть для взятаго полюса O (фиг. 18) данная система имѣетъ главный векторъ R и главный моментъ G . Система,



Фиг. 19.

состоящая изъ вектора F , приложеннаго къ O и геометрически равнаго R , и пары PP' , плоскость которой перпендикулярна къ F и моментъ равенъ G , будетъ, очевидно, эквивалентна данной системѣ. Если полюсъ O взять на центральной оси, то плоскость PP' (фиг. 19) будетъ перпендикулярна къ F , и моментъ ея будетъ возможно наименьшій. Такимъ образомъ любая система

приложенныхъ векторовъ можетъ быть замѣнена системою, состоящею изъ трехъ векторовъ. Нетрудно уменьшить число этихъ векторовъ до двухъ. Дѣйствительно, замѣняя пару PP' ей эквивалентною, мы можемъ совмѣстить (фиг. 20) точку приложенія одного изъ векторовъ пары, напр. P' , съ точкою O .



Теперь два вектора P' и P могутъ быть замѣнены однимъ Q , имъ эквивалентнымъ, слѣд. равнымъ, по сказанному въ началѣ этого параграфа, діагонали параллелограмма, построеннаго на P' и P . Такимъ образомъ оказывается, что любая система приложенныхъ векторовъ съ инвариантами, отличными отъ нуля, эквивалентна двумъ векторамъ, не лежащимъ въ одной плоскости.

27. Теоремы Шалля и Мёбиуса. Замѣна данной системы векторовъ двумя векторами можетъ быть сдѣлана безчисленнымъ множествомъ способовъ. На самомъ дѣлѣ, когда пару PP' мы замѣняемъ ей эквивалентною, то можемъ взять произвольную длину плеча δ , лишь бы при соответственномъ измѣненіи длины вектора P произведение $P\delta$ сохраняло свою величину: кромѣ того пара можетъ быть повернута на произвольный уголъ въ своей плоскости; наконецъ, полюсъ можетъ быть взятъ въ любой точкѣ. Но, во всякомъ случаѣ, какими бы двумя векторами P и Q мы не замѣнили данную систему, взаимный моментъ (PQ) остается величиною постоянной. А такъ какъ по § 14 взаимный моментъ равенъся шестеренному объему тетраэдра, построеннаго на P и Q , какъ на противоположныхъ ребрахъ, то и этотъ объемъ остается постояннымъ. Чтобы показать высказанное положеніе, называемое теоремою Шалля, положимъ, что координаты у вектора P $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$; а у вектора Q $X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$; тогда рассматриваемый взаимный моментъ по (24) выразится такъ:

$$(PQ) = X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1;$$

или, если принять во вниманіе тождества вида (21):

$$(PQ) = (X_1 + X_2)(L_1 + L_2) + (Y_1 + Y_2)(M_1 + M_2) + (Z_1 + Z_2)(N_1 + N_2).$$

Но по условію, векторы P и Q эквивалентны данной системѣ векторовъ, слѣд. координаты системы X, Y, Z, L, M, N , такъ связаны съ координатами этихъ векторовъ:

$$X = X_1 + X_2; \quad Y = Y_1 + Y_2; \quad Z = Z_1 + Z_2;$$

$$L = L_1 + L_2; \quad M = M_1 + M_2; \quad N = N_1 + N_2.$$

Отсюда вытекает, что взаимный момент

$$(PQ) = XL + YM + ZN;$$

равняется одному из инвариантов системы, что и доказывает теорему

Если данная система состоит из n векторов V_i с координатами

$$X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n;$$

можно показать, что взаимный момент двух векторов P и Q , которые эквивалентны системе, равняется сумме взаимных моментов всех векторов системы: т. е.

$$(PQ) = \sum_{i,j} (V_i, V_j)$$

Если i и j различны, так что число членов суммы равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Для взаимного момента (PQ) мы имеем по предыдущему выражение:

$$(PQ) = \sum_i X_i \sum_i L_i + \sum_i Y_i \sum_i M_i + \sum_i Z_i \sum_i N_i.$$

Если сократим все члены, обобщающиеся в нуль по (21), то найдем:

$$(PQ) = \sum_{i,j} (X_i L_j + Y_i M_j + Z_i N_j + X_j L_i + Y_j M_i + Z_j N_i);$$

выражение распространено на все пары различных значков i и j . Но по-прежнему каждый из $\frac{n(n-1)}{2}$ членов рассматриваемой суммы может быть замещен через (V_i, V_j) , слѣд.

$$(PQ) = \sum_{i,j} (V_i, V_j);$$

а хотели получить. Доказанная теорема носит название теоремы Мёбиуса.

28. Замѣтна системы векторов простѣйшею при инвариантах взаимных нулю. Мы видели, что в общемъ случаѣ когда инварианты отличны отъ нуля, т. е. когда

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0, \quad \Delta L + YM - ZN \neq 0;$$

система эквивалентна двумъ векторамъ, не лежащимъ въ одной плоскости. Теперь рассмотримъ случаи, когда какой либо изъ инвариантовъ обращается въ нуль.

Если $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, то и второй инвариантъ становится нулемъ. Такъ какъ главный векторъ системы нуль, то система или эквивалентна нулю, или эквивалентна парѣ момента геометрически равнаго главному моменту системы, независящему въ данномъ случаѣ отъ положенія полюса.

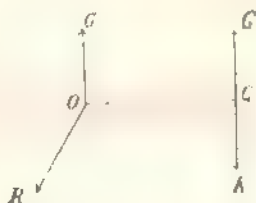
Переходимъ къ послѣднему случаю, когда

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0; \quad XL + YM + ZN = 0.$$

Нетрудно видѣть, что написанныя выраженія представляютъ условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы данная система была эквивалентна одному вектору. Если система можетъ быть замѣнена однимъ векторомъ, то для полюсовъ, лежащихъ на основаніи этого вектора, главный моментъ G системы долженъ обращаться въ нуль. А такъ какъ наименьшее возможное значеніе для главнаго момента равно проекціи его на главный векторъ, то главный моментъ G или нуль, или перпендикуляренъ къ R . По (28)

$$XL + YM + ZN = RG \cos(GR),$$

слѣд., вышеприведенныя условія необходимы, но они и достаточны. Если $G = 0$, это очевидно само собою; а если (фиг. 21)



Фиг. 21.

главный моментъ G перпендикуляренъ къ главному вектору R , то, отступивъ отъ полюса O по перпендикуляру къ плоскости ROG въ соответствующую сторону (§ 20) на разстояніе $OC = \frac{G}{R}$, найдемъ полюсъ C , для котораго главный моментъ обратится въ нуль, и слѣд., система окажется дѣйствительно эквивалентной одному вектору, приложенному къ C .

29. Плоская система векторовъ. Система, у которой всѣ векторы лежатъ въ одной плоскости, называется плоскою. Главный моментъ такой системы перпендикуляренъ къ ея плоскости, а главный векторъ долженъ лежать въ самой плоскости, слѣд., по § 28 система плоская эквивалентна или одному вектору, или парѣ, или нулю.

30. Система параллельныхъ векторовъ. Центръ системы. Пусть всѣ векторы системы параллельны направленію U , характеризуемому косинусами l, m, n . Тогда координаты какого либо вектора V , будутъ:

$$P_l l, P_m m, P_n n, x_i, y_i, z_i;$$

причемъ P_i будетъ положительно или отрицательно, смотря по тому, направленіе V , идетъ ли по U , или прямо противъ U . Изъ выраженій для координатъ системы:

$$X = l \sum P_i; \quad Y = m \sum P_i; \quad Z = n \sum P_i;$$

$$L = \sum P_i (my_i - mz_i); \quad M = \sum P_i (lz_i - nx_i); \quad N = \sum P_i (mx_i - ly_i),$$

видно, что такая система эквивалентна или нулю, или парѣ, или одному вектору, равному $\sum P_i$, направленному параллельно даннымъ и приложенному къ точкѣ, имѣющей своими координатами

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}. \quad (30)$$

Точка эта носить названіе центра системы. Выраженія для координатъ центра показываютъ, что положеніе центра зависитъ лишь отъ относительной величины векторовъ и отъ положенія ихъ точекъ приложенія, но не зависитъ отъ общаго направленія векторовъ, т. е. отъ l, m, n . Такимъ образомъ, если, оставая векторы параллельными, повернуть всѣ ихъ на одинъ и тотъ же уголъ около точекъ приложенія, то положеніе центра не измѣнится.

Точно также положеніе центра не зависитъ отъ выбора осей координатъ. Если измѣнимъ систему координатныхъ осей, то при помощи выраженія (30) преобразовать, пользуясь формулами аналитической геометріи:

$$\xi = a + a'x + a'y + a''z;$$

$$\eta = b + b'x + b'y + b''z;$$

$$\zeta = c + c'x + c'y + c''z.$$

Тогда найдемъ:

$$\xi_c = \sum_{i=1}^n P_i \xi_i = a + a'x + a''y + a'''z \text{ и т. д.,}$$

откуда и видно, что центр мѣста своего не перемѣнилъ.

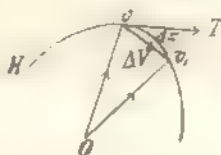
Векторъ-функция.

31. Векторъ-функция. Годографъ. Геометрическая производная.

Если величина и направление вектора V зависятъ отъ значений, принимаемыхъ какими либо перемѣнными t, u, v, w, \dots , то векторъ V называется векторальной функцией этихъ перемѣнныхъ или, короче, векторъ-функцией отъ t, u, v, w, \dots . Мы ограничимся здѣсь разсмотрѣнемъ векторъ-функцию только отъ одного независимаго перемѣннаго t . Координаты такого вектора представляются некоторыми аналитическими функциями отъ t :

$$(31) \quad X = f_1(t), \quad Y = f_2(t), \quad Z = f_3(t).$$

Фиг. 22.



Если изъ какого либо неизмѣннаго полюса O станемъ строить (фиг. 22) векторы Op, Op_1, \dots , геометрически равные разсматриваемому перемѣнному вектору, то геометрическимъ мѣстомъ концовъ этихъ векторовъ будетъ некоторая кривая H , носящая название годографа вектора V . Очевидно, выраженія (31) представляютъ собою уравненія годографа, если за полюсъ взято начало координатъ.

Когда векторъ, не измѣняя своего направленія, мѣняетъ только свою длину, годографомъ служитъ отръзокъ прямой. Если векторъ, сохраняя постоянной свою длину, мѣняетъ только направленіе, годографъ будетъ сферическая кривая. Для постояннаго вектора годографъ обращается въ точку. Годографъ будетъ кривою плоскою, если проекція вектора на некоторое неизмѣнное направленіе постоянна.

Возьмемъ два значенія независимой переменной: t и t_1 ; причёмъ пусть $t_1 > t$. Для нихъ векторъ-функция*) пусть принимаетъ значенія V и V_1 (фиг. 22). Векторъ ΔV , представляющийъ собою геометрическую разность V_1 и V :

$$(\Delta V) = (V_1) - (V);$$

называется геометрическимъ приращеніемъ векторъ-функции V , соответствующимъ приращенію

$$\delta t = t_1 - t,$$

независимой переменной t . Координаты вектора ΔV :

$$\delta X, \delta Y, \delta Z,$$

черезъ координаты векторовъ V_1 и V : X_1, Y_1, Z_1, X, Y, Z , по (11) выражаются такъ:

$$\delta X = X_1 - X; \quad \delta Y = Y_1 - Y; \quad \delta Z = Z_1 - Z.$$

Векторъ $\frac{1}{\delta t} (\Delta V)$ съ координатами

$$\frac{\delta X}{\delta t}, \quad \frac{\delta Y}{\delta t}, \quad \frac{\delta Z}{\delta t} \quad (32)$$

отличается отъ вектора ΔV только своею длиною. Рассмотримъ предѣлъ вектора $\frac{1}{\delta t} (\Delta V)$, взятый въ томъ предположеніи, что значеніе t_1 приближается къ t , т. е. δt приближается къ нулю. Если такой предѣльный векторъ существуетъ, то онъ носитъ названіе геометрической производной отъ вектора V по переменной t и означается такъ \dot{V} **). По предыдущему (32), координатами вектора \dot{V} будутъ аналитическія производныя отъ координатъ вектора V :

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \dot{V} \cos(\dot{V}_x) = \frac{dX}{dt}; & \dot{V}_y &= \dot{V} \cos(\dot{V}_y) = \frac{dY}{dt}; \\ \dot{V}_z &= \dot{V} \cos(\dot{V}_z) = \frac{dZ}{dt}. \end{aligned} \quad (33)$$

*) Мы рассматриваемъ лишь функции однозначныя.

***) Вводитъ особый символъ для означенія той переменной, по которой берется производная, не представляется необходимымъ, такъ какъ мы рассматриваемъ векторъ-функции только одной переменной.

Иначе по (31), если запятыми означимъ производныя по t

$$\dot{V}_1 = f_1'(t); \quad \dot{V}_2 = f_2'(t); \quad \dot{V}_3 = f_3'(t).$$

Чтобы установить связь между геометрическою производною вектора и его годографомъ, замѣчаемъ, что (фиг. 22) приращеніе ΔV вектора служитъ хордою годографа, стягивающею дугу $\Delta\sigma$: слѣд. съ одной стороны

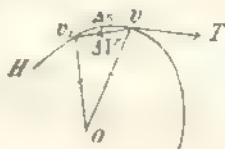
$$\text{Пред.} \left\{ \frac{\Delta\sigma}{\Delta V} \right\} = 1, \\ \Delta V = 0$$

а съ другой стороны предѣльное направленіе ΔV , когда точка v_1 подходит къ v , совпадаетъ съ направленіемъ касательной T къ годографу въ точкѣ v . Отсюда вытекаетъ, что длина вектора \dot{V} равняется численной величинѣ производной отъ дуги годографа по независимой переменной:

$$(34) \quad \dot{V} = \text{Пред.} \left\{ \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \right\} = \frac{d\sigma}{dt},$$

а направленіе \dot{V} совпадаетъ съ направленіемъ касательной T къ годографу въ соответственной точкѣ; причемъ касательная должна идти въ ту сторону, въ которую перемѣщается точка v при положительномъ δt .

Фиг. 23.



Если бы δt было меньше t , т. е. $\delta t < 0$, то (фиг. 23) векторъ ΔV шелъ бы въ ту сторону, въ которую перемѣщается точка v при отрицательномъ δt^* , но за то векторъ $\frac{1}{\delta t} (\Delta V)$ съ координатами (32) былъ бы по направленію противоположенъ ΔV , и слѣд

*) Это направленіе всегда противоположно прежнему, если только t не представляетъ собою особеннаго значенія независимаго переменнаго. напр. такого, при которомъ векторъ-функция имѣетъ макс.-мин. отклоненія въ какую-либо сторону.

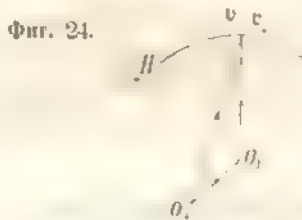
предѣльное направленіе его т. е. геометрической производной \dot{V} , совпало бы опять съ направлениемъ T касательной къ годографу въ сторону перемѣщенія точки v при положительномъ δt .

Пусть два вектора V_1 и V_2 (фиг. 24) функціи одной независимой переменной t отличаются другъ отъ друга на постоянный векторъ A , т. е.

$$(V_1) = (V_2) + (A).$$

Тогда, если для вектора V_1 годографомъ служить кривая H при полюсѣ O_1 , то та же кривая H будетъ годографомъ и для V_2 , только при полюсѣ O_2 , если $(O_1 O_2) = (A)$; а отсюда, по предъидущему, такъ какъ соответственныя точки v_1 и v_2 совпадаютъ, заключаемъ о равенствѣ:

$$(\dot{V}_1) = (\dot{V}_2).$$



Разсмотрѣнный выше векторъ \dot{V} въ свою очередь является функцией отъ t ; слѣд. и отъ него можетъ быть взята геометрическая производная \ddot{V} ; координаты этого вектора будутъ:

$$\ddot{V}_x = \frac{d^2 X}{dt^2}; \quad \ddot{V}_y = \frac{d^2 Y}{dt^2}; \quad \ddot{V}_z = \frac{d^2 Z}{dt^2}. \quad (85)$$

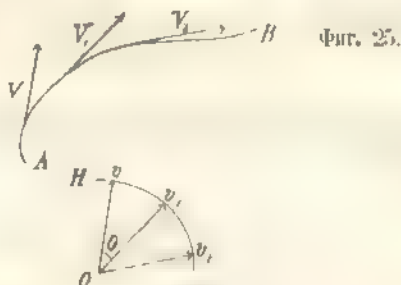
По отношенію къ вектору V векторъ \dot{V} называется геометрической производною второго порядка. Продолжая поступать такимъ же образомъ, мы можемъ получить отъ вектора V геометрическую производную n -го порядка: $\overset{(n)}{V}$, съ координатами

$$\overset{(n)}{V}_x = \frac{d^n X}{dt^n}; \quad \overset{(n)}{V}_y = \frac{d^n Y}{dt^n}; \quad \overset{(n)}{V}_z = \frac{d^n Z}{dt^n}.$$

32. Примѣръ. Пусть въ некоторомъ пространствѣ (витали или плоскости, безразлично) задана уравненіями:

$$x = \varphi_1(s); \quad y = \varphi_2(s); \quad z = \varphi_3(s);$$

гдѣ s длина дуги этой кривой, считаемая отъ какой либо точки A (фиг. 25) на ней. Ставимъ въ различныхъ точкахъ кривой проводить касательныя и откладывать на нихъ въ сторону возрастанія дуги s длину равную единицѣ (одному сантиметру). Тогда мы получимъ некоторый переменный векторъ \dot{V} .



Фиг. 25.

функцию отъ s . Координаты этого вектора будутъ $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. По (33) найдемъ геометрическую производную отъ него \dot{V} :

$$(36) \quad \dot{V} \cos(\dot{V}x) = \frac{d^2x}{ds^2}; \quad \dot{V} \cos(\dot{V}y) = \frac{d^2y}{ds^2}; \quad \dot{V} \cos(\dot{V}z) = \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Годографомъ H въ настоящемъ случаѣ будетъ кривая, лежащая на сферѣ радиуса, равнаго одному сантиметру; слѣд. элементъ дуги годографа численно равняется θ , углу между двумя смежными радиусами векторами, или, что то же, между смежными касательными данной кривой. По (34) величина геометрической производной равняется предѣлу отношенія $\frac{\theta}{\Delta s}$, т. е. кривизнѣ данной кривой, слѣд.

$$(37) \quad \dot{V} = \frac{1}{\rho},$$

гдѣ ρ радиусъ кривизны кривой. Касательная T въ годографу, какъ касательная къ сферѣ, перпендикулярна къ радиусу вектору точки касанія, т. е. параллельна плоскости нормальной къ данной кривой, а, какъ касательная къ конусу, имѣющему вершину въ полюсѣ, а направляющею годографу, лежитъ въ одной плоскости со смежными радиусомъ векторомъ, т. е. параллельна плоскости кривизны; слѣд. относительно данной кривой эта касательная параллельна главной нормали. Притомъ направленіе ея идетъ въ ту сторону, въ которую поворачивается касательная данной кривой, т. е. отъ кривой къ центру кривизны. Но такое направленіе обыкновенно приписывается радиусу кривизны ρ , слѣд.

$$\dot{V} \parallel \rho.$$

Отсюда по (36) и (37) получаемъ выраженія, которыми намъ придется пользоваться:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho x); \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho y); \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \cos(\rho z). \quad (38)$$

33. Проекція геометрической производной на неизмѣнное и подвижное направление. Индексъ или ортъ данного направленія. Уже изъ выраженій (33) для координатъ геометрической производной \dot{V} ясно, что проекція ея на какое либо неизмѣнное (независящее отъ t) направление U , опредѣляемое косинусами λ , μ , ν съ координатными осями, должна равняться аналитической производной отъ проекціи вектора V на то же направление U въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{aligned} \dot{V} \cos(\dot{V}U) &= \dot{V}_x \lambda + \dot{V}_y \mu + \dot{V}_z \nu = \frac{d}{dt} (X\lambda + Y\mu + Z\nu) = \\ &= \frac{d}{dt} [V \cos(VU)], \end{aligned} \quad (39)$$

такъ какъ, по условію, косинусы λ , μ , ν отъ t не зависятъ.

Но, когда само направленіе мѣняется въ зависимости отъ значений, принимаемыхъ переменною t , тогда предыдущее выраженіе замѣняется другимъ:

$$\dot{V} \cos(\dot{V}U) = \frac{d}{dt} (X\lambda + Y\mu + Z\nu) - X \frac{d\lambda}{dt} - Y \frac{d\mu}{dt} - Z \frac{d\nu}{dt}.$$

Замѣтимъ, что λ , μ , ν служатъ координатами переменногo вектора u , имѣющаго длину равную единицѣ и совпадающаго по направленію съ U ; тогда, означая геометрическую производную отъ вектора, называемаго индексомъ или ортомъ даннаго направленія, черезъ \dot{u} , предыдущую формулу можемъ переписать такъ

$$\dot{V} \cos(\dot{V}u) + Vu \cos(V\dot{u}) = \frac{d}{dt} [V \cos(Vu)]. \quad (40)$$

34. Геометрическій интегралъ отъ вектора. Если операцію получения геометрической производной отъ даннаго вектора, назовемъ геометрическимъ дифференцированіемъ, то обратную операцію, по аналогіи, должны назвать геометрическимъ интегрированіемъ, и слѣд. векторъ W , имѣющій своею геометрическою производною векторъ V съ координатами X , Y , Z , долженъ называться геометрическимъ интеграломъ отъ вектора V . Изъ этого ясно, что координатами W будутъ:

$$\int X dt, \quad \int Y dt, \quad \int Z dt.$$

(1)сюда заключаемъ, что векторовъ, служащихъ интегралами данного бесчисленное множество. Далѣе очевидно, что геометрической равносностью двухъ интеграловъ отъ одного и того же вектора служить некоторый постоянный векторъ. Чтобы задача о нахожденіи интеграла стала опредѣленною, необходимо добавочное условіе. Такимъ условіемъ обыкновенно служить заданіе направленія и длины вектора интеграла для частнаго значенія независимаго переменнаго t . Заданныя величины носятъ названіе начальныхъ. Нетрудно видѣть, что геометрическій интегралъ W отъ вектора V , принимающій начальное значеніе W_0 (Ξ_0, Υ_0, Z_0) для $t = t_0$, выразится координатами

$$(41) \quad W_x = \Xi_0 + \int_{t_0}^t X dt; \quad W_y = \Upsilon_0 + \int_{t_0}^t Y dt; \quad W_z = Z_0 + \int_{t_0}^t Z dt.$$

35. Геометрическая производная системы приложенныхъ векторовъ. Обратимся теперь къ системѣ приложенныхъ векторовъ. Пусть эта система S переменная и функція одной независимой переменной t ; тогда шесть координатъ системы (25).

$$\begin{bmatrix} X; Y; Z \\ L; M; N \end{bmatrix}$$

будутъ аналитическими функціями той же переменной. Станемъ разсматривать два значенія независимой переменной: t и t_1 ; для нихъ координаты системы будутъ:

$$\begin{bmatrix} X; Y; Z \\ L; M; N \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} X_1; Y_1; Z_1 \\ L_1; M_1; N_1 \end{bmatrix}$$

Система ΔS съ координатами:

$$(42) \quad \begin{bmatrix} X_1 - X; Y_1 - Y; Z_1 - Z \\ L_1 - L; M_1 - M; N_1 - N \end{bmatrix},$$

должна быть соединена съ системою S ($t = t$) въ одну для получения системы эквивалентной системѣ S_1 ($t = t_1$). Назовемъ систему ΔS геометрическимъ приращеніемъ системы S , соответствующимъ приращенію независимой переменной $\delta t = t_1 - t$. Главный векторъ ΔR и главный моментъ ΔG геометрическаго приращенія системы, какъ видно изъ (42), равны соответственно геометрическимъ приращеніямъ главнаго вектора R и главнаго момента G данной системы.

Раздѣляя координаты системы ΔS на приращеніе независимой переменной δt и переходя къ предѣлу при $\delta t = 0$, получимъ систему \dot{S} съ координатами:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{dX}{dt}; & \frac{dY}{dt}; & \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dL}{dt}; & \frac{dM}{dt}; & \frac{dN}{dt} \end{array} \right], \quad (43)$$

которую и назовемъ геометрической производною отъ данной системы S . Очевидно, система \dot{S} имѣетъ своимъ главнымъ векторомъ и главнымъ моментомъ соответственно геометрическія производныя отъ главнаго вектора и главнаго момента данной системы.

36. Зависимость координатъ геометрической производной системы отъ полюса. Производный полюсъ. До сихъ поръ мы предполагали, что полюсомъ служить начало координатъ; если за полюсъ возьмемъ какую-либо точку $A(a, b, c)$, то координатами системы \dot{S} по (43) и (26) будутъ:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{dX}{dt}; & \frac{dY}{dt}; & \frac{dZ}{dt} \\ L - b \frac{dZ}{dt} + c \frac{dY}{dt}; & M - c \frac{dX}{dt} + a \frac{dZ}{dt}; & N - a \frac{dY}{dt} + b \frac{dX}{dt} \end{array} \right] \quad (44)$$

Сравнивая настоящія выраженія съ новыми координатами данной системы S :

$$\left[\begin{array}{ccc} X; & Y; & Z \\ L - bZ + cY; & M - cX + aZ; & N - aY + bX \end{array} \right]; \quad (45)$$

видимъ, что главный векторъ и главный моментъ геометрической производной будутъ по прежнему соответственно равны геометрическимъ производнымъ отъ главнаго вектора и главнаго момента данной системы,

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0,$$

т. е. если полюсъ A неизмѣненъ, не мѣняетъ своего положенія въ зависимости отъ значеній t .

Пусть теперь полюсъ A переменный (a, b, c функции от t). Назовемъ главный векторъ и главный моментъ системы S для полюса A черезъ R^A и G^A , а соответственные векторы для системы \dot{S} черезъ \mathfrak{R}^A и \mathfrak{G}^A . По (15) и (44) для проекцій этихъ векторовъ на координатныя оси имѣемъ выраженія:

$$R_x^A = X, \quad R_y^A = Y, \quad R_z^A = Z;$$

$$(46) \quad \mathfrak{R}_x^{(A)} = \frac{dX}{dt}, \quad \mathfrak{R}_y^{(A)} = \frac{dY}{dt}, \quad \mathfrak{R}_z^{(A)} = \frac{dZ}{dt};$$

а также

$$G_x^A = L - bZ + cY, \quad G_y^A = M - cX + aZ, \quad G_z^A = N - aY + bX;$$

$$\mathfrak{G}_x^{(A)} = \frac{dL}{dt} - b \frac{dZ}{dt} + c \frac{dY}{dt}, \quad \mathfrak{G}_y^{(A)} = \frac{dM}{dt} - c \frac{dX}{dt} + a \frac{dZ}{dt},$$

$$(47) \quad \mathfrak{G}_z^{(A)} = \frac{dN}{dt} - a \frac{dY}{dt} + b \frac{dX}{dt}.$$

Изъ (46) вытекаеть

$$\mathfrak{R}_x^{(A)} = \frac{d}{dt} R_x^A, \quad \mathfrak{R}_y^{(A)} = \frac{d}{dt} R_y^A, \quad \mathfrak{R}_z^{(A)} = \frac{d}{dt} R_z^A,$$

или

$$(48) \quad (\mathfrak{R}^{(A)}) = (\dot{R}^A),$$

т. е. для переменнаго (подвижнаго) полюса главный векторъ геометрической производной равенъ геометрической производной главнаго вектора данной системы.

Но не то получится изъ равенствъ (47), рассматривая проекціи на ось x -овъ, видимъ, что

$$(49) \quad \mathfrak{G}_x^{(A)} = \frac{d}{dt} (L - bZ + cY) = Z \frac{db}{dt} - Y \frac{dc}{dt} - \frac{d}{dt} G_x^A + Z\dot{b} - Y\dot{c},$$

если для краткости производныя по t станемъ обозначать штрихами сверху.

Подобнымъ образомъ

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_x^{(A)} &= \frac{d}{dt} G_x^{(A)} + Xc' - Za', \\ \mathbb{G}_y^{(A)} &= \frac{d}{dt} G_y^{(A)} + Ya' - Xc'. \end{aligned} \quad (50)$$

Назовемъ точку съ координатами a', b', c' полюсомъ производимъ отъ данного переменнаго A (a, b, c). Тогда по (18) двучлены

$$Zb' - Yc', \quad Xc' - Za', \quad Ya' - Xb'$$

представляютъ собою проеции на оси момента около начала координатъ вектора

$$X, Y, Z, a', b', c',$$

т. е. главнаго вектора системы S , приложеннаго къ производному полюсу.

Означимъ этотъ моментъ черезъ K , т. е. пусть

$$K_x = Zb' - Yc', \quad K_y = Xc' - Za', \quad K_z = Ya' - Xb'. \quad (51)$$

Тогда равенства (49) и (50) переищутся такъ

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_x^{(A)} &= \frac{d}{dt} G_x^{(A)} + K_x, \\ \mathbb{G}_y^{(A)} &= \frac{d}{dt} G_y^{(A)} + K_y, \\ \mathbb{G}_z^{(A)} &= \frac{d}{dt} G_z^{(A)} + K_z, \end{aligned}$$

или короче

$$(\mathbb{G}^{(A)}) = (\dot{G}^{(A)}) + (K), \quad (52)$$

т. е. видимъ, что для полюса переменнаго (подвижнаго) главнаго момента геометрической производной системы суммъ геометрической производной отъ главнаго момента данной системы и момента около начала координатъ главнаго вектора той же данной системы, приложеннаго къ производному полюсу.

Если полюсъ A неизмѣненъ (неподвиженъ), производный отъ главнаго момента совпадаетъ съ началомъ координатъ, и слѣд. добавоч-

ный моментъ K обращается въ нуль. Точно также моментъ K будетъ нулемъ, если главный векторъ R^A данной системы равенъ нулю, т. е. система эквивалентна парѣ или нулю для разсматриваемаго значенія переменной t . Въ общемъ случаѣ моментъ K обращается въ нуль по (51), если

$$\frac{a'}{X} = \frac{b'}{Y} = \frac{c'}{Z}, \quad (58)$$

т. е. если главный векторъ R^A данной системы и радиусъ векторъ производнаго полюса параллельны.

Если вмѣсто системы приложенныхъ векторовъ мы имѣемъ только одинъ приложенный векторъ, то все сказанное выше остается въ силѣ, только слова главный векторъ и главный моментъ должны быть замѣнены словами векторъ и моментъ.

Кинематика

Статика

Статика

Кинематика

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Со времени Ньютона вся совокупность наукъ, занимающихся изученіемъ явленій матеріальнаго міра, называется Натуральной Философіей. Простейшее изъ этихъ явленій, безспорно, движеніе, поэтому всякое другое явленіе считается объяснимымъ, если оно сведено на движеніе. Отсюда вытекаетъ, что наука, изучающая законы движенія тѣлъ и носящая названіе Аналитической или Рациональной Механики, должна лежать въ основаніи Натуральной Философіи.

Движеніе можно изучать независимо отъ причинъ, его производящихъ. Часть Аналитической Механики, занимающаяся этимъ, называется по Амперу Кинематикою. Здѣсь разсматриваются пространственныя соотношенія и ихъ измѣненія, идущія параллельно съ теченіемъ времени. Другими словами Кинематика ничто иное, какъ Геометрія, въ которой независимой переменной служитъ время. Движущійся объектъ въ Кинематикѣ важенъ лишь по своей формѣ и своему положенію: это объектъ геометрическій: точка, линия, поверхность, тѣло или собраніе ихъ.

Но, если разсматривать движеніе матеріальныхъ тѣлъ, а не геометрическихъ объектовъ, то мы не можемъ отрѣшиться отъ изученія причинъ движенія, называемыхъ силами. Наука о силахъ, носящая названіе Динамики, и составляетъ другую, самую важную часть Аналитической Механики. Динамику раздѣляютъ иногда въ части: Статику и Кинетику. Въ первой говорится о равновѣсїяхъ, при которыхъ тѣла, подверженныя дѣйствию приложенныхъ къ нимъ силъ, могутъ оставаться въ покоѣ; во второй предѣляется движеніе матеріальныхъ тѣлъ подѣ дѣйствиемъ силъ.

Въ нашемъ изложеніи мы придерживаемся такого порядка: начинаемъ съ Кинематики, раздѣлявъ ее на Кинематику точечную и Кинематику твердаго тѣла; затѣмъ переходимъ

къ Динамикѣ, подраздѣляя ее также на два крупныхъ отдѣла: Динамику матеріальной точки и Динамику системы. Статистику мы разсматриваемъ лишь какъ отдѣльную главу Динамики.

Болѣе мелкія подраздѣленія, равно какъ и термины здѣсь приведенные, будутъ изложены и объяснены далѣе въ соответственныхъ мѣстахъ.

КИНЕМАТИКА.

37. Единицы длины и времени. Въ Геометрии необходимо было условиться объ единицѣ длины для того, чтобы имѣть возможность выразить пространственные размѣры числами. За единицу длины обыкновенно принимается одинъ сантиметръ, т. е. сотая часть длины эталона, сдѣланнаго французскимъ механикомъ Борда (Borda) въ 1795 году и хранящагося въ Парижѣ.

Въ Кинематикѣ пространственныя соотношенія приводятся въ связь съ теченіемъ времени. Понятіе—время, какъ и понятіе—пространство, опредѣленію не подлежитъ. Время, протекшее между двумя событіями, называется промежуткомъ времени. Граница между двумя смежными промежутками времени носитъ названіе момента времени. Чтобы выразить промежутокъ времени числомъ, надо условиться объ единицѣ времени. За единицу времени берется обыкновенно секунда средняго времени, т. е.

$\frac{1}{86400}$ среднихъ сутокъ, что составляетъ около $\frac{1}{86164,09}$ звѣздныхъ. Моментъ, съ котораго начинается счетъ времени, называется эпохою. Время до эпохи считается отрицательнымъ.

38. Движеніе. (Сплошную совокупность (геометрическое мѣсто) какихъ либъ тождественныхъ между собою геометрическихъ объектовъ условимся называть средою, а каждый отдѣльный геометрической объектъ, входящій въ составъ совокупности, элементомъ среды. Подъ геометрическимъ объектомъ мы разумѣемъ точку, линію, поверхность, тѣло, собраніе ихъ въ конечномъ или безконечно большомъ числѣ. Напримѣръ, линейчатая поверхность представляетъ собою сплошную совокупность прямыхъ линій (ея производящихъ) или сплошную совокупность точекъ, слѣд. эта поверхность, какъ среда, можетъ имѣть своимъ элементомъ прямую или точку. Размѣры среды могутъ быть какъ конечные, такъ и безконечно большіе.

Подъ движеніемъ даннаго геометрическаго объекта въ данной средѣ разумѣется послѣдовательное съ теченіемъ времени совпаденіе этого объекта съ тождественными ему элементами

среды. Такимъ образомъ, можно говорить о движеніи лишь тогда, когда мы имѣемъ 1) то, что движется, и 2) то, въ чемъ происходитъ движеніе. Такъ движеніе прямой по линейчатой поверхности состоитъ въ послѣдовательномъ совпаденіи прямой съ производящими поверхностями; движеніемъ точки по той же поверхности называется переходъ точки изъ одной точки поверхности въ другую.

Одинъ и тотъ же геометрический объектъ можетъ двигаться одновременно въ двухъ или болѣе средъ; точно также въ одной и той же средѣ одновременно могутъ двигаться два или болѣе объекта.

Среда, въ которой происходитъ движеніе, вообще говоря должна имѣть по крайней мѣрѣ однимъ измѣряемымъ больше, чѣмъ движущійся объектъ; но, если то, что движется, мы разсматриваемъ, какъ сплошную совокупность геометрическихъ объектовъ съ равнымъ числомъ измѣреній, то среда можетъ имѣть столько же измѣреній, сколько ихъ имѣетъ и самъ движущійся объектъ. Въ этомъ случаѣ движеніемъ называется послѣдовательное съ теченіемъ времени совпаденіе элементовъ одной среды (той, которая движется, или неподвижной) съ элементами другой среды (той, въ которой происходитъ движеніе, или неподвижной). Такъ и налагающіяся линейчатая поверхности могутъ двигаться одна на другую, если на нихъ смотрѣть, какъ на сплошную совокупность прямыхъ линий или точекъ.

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся изученіемъ движеній въ трехъ измѣреніяхъ и неограниченныхъ размѣровъ, имѣющей элементъ точку. Когда расстоянія между точками среды измѣняются съ теченіемъ времени, то среда носитъ названіе измѣняемой или неизмѣнной; въ противномъ случаѣ называется неизмѣняемою или деформирующеюся средою, какъ за основной элементъ у насъ взята точка, то движущіеся объектами будутъ точка, группа точекъ или сплошная совокупность ихъ, т. е. среда одного, двухъ или трехъ измѣреній (тѣло).

Движеніе въ средѣ деформирующей насъ не придется разсматривать, поэтому въ послѣдующемъ изложеніи терминъ „среда“ безъ прибавленія будетъ означать среду неизмѣнную. Иной разъ, по общепринятому обычаю, мы будемъ употреблять и выраженіе „движеніе въ пространствѣ“; слово пространство будетъ тогда означать опять неизмѣнную среду, элементъ коей служитъ точка.

Простѣйшимъ изъ подлежащихъ нашему разсмотрѣнію движеніямъ несомнѣнно, служитъ движеніе одной точки. Для точки естественно слѣдовало бы разсмотрѣть и движенія ея въ средѣхъ и двухъ измѣреній (по линіи и по поверхности), но мы ограничимъ это въ сторонѣ, такъ какъ такіа движенія являются частнымъ случаемъ движенія въ трехмѣрной средѣ. Обстоятельства, возбуждающія движеніе точки въ трехмѣрной средѣ, и излагаются въ Кинематикѣ точки.

По предыдущему, движениемъ болѣе сложнаго, чѣмъ точка, геометрическаго объекта въ трехмѣрной средѣ называется послѣдовательное съ течениемъ времени совпаденіе точекъ этого объекта съ точками среды. Движеніе какого либо объекта считается навѣстнымъ, если мы въ состояніи найти движеніе любой точки его въ рассматриваемой средѣ. Какими данными опредѣляется движеніе геометрическаго объекта, зависитъ отъ его состава и свойствъ. Наболѣе просто находится движеніе одного только сплошнаго объекта и, при томъ, неизмѣннаго вида. За такой объектъ мы беремъ трехмѣрную неизмѣнную среду, иначе, неизмѣняемую систему точекъ или твердое тѣло въ кинематическомъ смыслѣ. Изложеніе обстоятельствъ движеній твердаго тѣла въ неизмѣняемой трехмѣрной средѣ и составляетъ предметъ Кинематики твердаго тѣла. Движеній болѣе простыхъ объектовъ неизмѣннаго вида: группы точекъ, находящихся на постоянномъ разстояніи другъ отъ друга, неизмѣнной лини или поверхности мы подробно не касаемся, такъ какъ эти движенія представляютъ собою лишь частный случай движенія твердаго тѣла.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА I.

Конечныя уравненія движенія точки. Скорость точки.

39. Координаты точки. Точка кинематическая ничѣмъ не отличается отъ геометрической. По предыдущему, точка движется въ среѣ, если она въ различные моменты времени совпадаетъ съ различными точками среды. Та точка среды, съ которою мы рассматриваемый моментъ совпадаетъ движущаяся точка, называется положеніемъ точки въ среѣ. Если положеніе точки меняется съ временемъ, то она находится въ покоѣ относительно среды. Мы будемъ рассматривать лишь непрерывное движеніе точки, т. е. такое, въ которомъ точка для двухъ безконечно близкихъ моментовъ времени занимаетъ два безконечно близкихъ положенія.

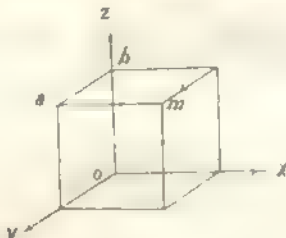
Конечно, чтобы говорить о движеніи точки въ среѣ, мы должны уметь отличать точки среды одну отъ другой или, что еще важнѣе, уметь опредѣлять положеніе точки относительно среды. Для этого, аналитически опредѣляющія положеніе точки въ среѣ, брать названіе координатъ точки.

За координаты точки можно взять (фиг. 26) три разстоянія отъ трехъ данныхъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей Ox , Oy , Oz , называемыхъ координатными.

Координатныя плоскости своимъ пересѣченіемъ даютъ три взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ Ox , Oy , Oz , называемыхъ координатными осями. Точка O ихъ встрѣчи носитъ названіе начала координатъ. Каждой оси координатъ дается какое-либо направленіе. Мы всегда будемъ предполагать, что направленіе осей выбрано слѣдующимъ образомъ*: для наблюдателя,

стоящаго вдоль оси Oz , такъ, чтобы направлѣніе ея шло отъ ногъ къ головѣ, и смотрящаго по направлѣнію оси Ox , направлѣніе оси Oy идетъ отъ лѣвой руки къ правой. Въ каждой координатной плоскости различаются двѣ стороны — лицевая и изнанка. Лицевая сторона обращена туда, куда идетъ направлѣніе координатной оси, перпендикулярной къ разсматриваемой плоскости, такъ на фиг. 26) плоскость Ox обращена къ намъ своею лицевою стороною.

Фиг. 26.



Разстояніе точки отъ плоскости yOz означается буквою x , отъ xOz — буквою y и отъ xyO — буквою z ; числа, выражающія длины этихъ разстояній, считаются положительными или отрицательными, смотри по тому, какая сторона координатной плоскости обращена къ точкѣ — лицевая или изнанка. Изложенныя координаты называются прямоугольными прямолинейными или ортогональными декартовыми.

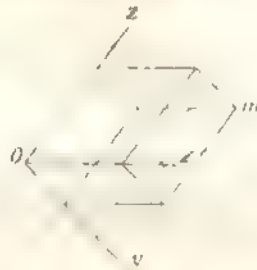
Среда, точки коей опредѣляются постоянными значеніями координатъ, очевидно, неизмѣнная; кромѣ того, оси $Oxyz$ неизмѣнно съ этою средою связаны, т. е. разстоянія всякой точки на оси или на координатной плоскости отъ любой точки среды постоянны во времени. Все вышесказанное вытекаетъ изъ принятаго нами выраженія для разстоянія ρ между какими либо двумя точками (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) :

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Мы не будемъ повторять того же самаго для другихъ системъ координатъ, такъ какъ разстояніе ρ всегда функція лишь координатъ точекъ и слѣд. постоянна при постоянствѣ этихъ координатъ.

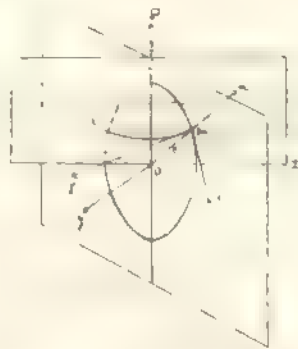
Кромѣ системы декартовыхъ ортогональныхъ координатъ существуетъ безчисленное множество другихъ. Если координатныя плоскости yOz , xOz и xyO взаимно не перпендикулярны (фиг. 27), то координатами x, y, z точки m могутъ служить отрѣзки (отъ точки m до координатныхъ плоскостей) прямыхъ, параллельныхъ осямъ координатъ. Такая система называется косоугольною или косоугольною декартовою.

Далѣ (фиг. 28) положеніе точки m опредѣлится длиною радиуса вектора ρ , проведеннаго изъ даннаго полюса O , начала координатъ, угломъ φ этого радиуса вектора съ данною осью Oz , называемою полярною, и двуграннымъ угломъ ψ , который образуетъ плоскость, проходящая черезъ полярную ось и точку,



Фиг. 27.

данною плоскостью POz , называемою плоскостью перваго меридіана. Эта система координатъ носитъ названіе сферической.



Фиг. 28.

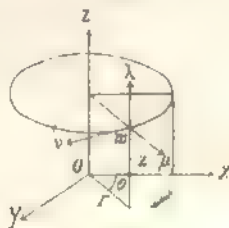
Иначе можно сказать, что въ сферической системѣ положеніе точки m опредѣляется векторомъ Om ; тогда координаты той же точки m для прямоугольной декартовой системы съ началомъ въ O являются (§ 3) вмѣстѣ съ тѣмъ и координатами вектора Om .

Для можно (фиг. 29) за координаты точки m принять разстояніе r ея отъ данной плоскости xOy , разстояніе ρ точки отъ полюса Oz , перпендикулярной къ первой плоскости, и двугранный уголъ θ плоскости черезъ m и Oz съ данною плоскостью. Такая система называется цилиндрическою.

Въ сферическихъ координатахъ прямую OP (фиг. 28) возьмемъ за ось z , а плоскость перваго меридіана за плоскость xOz прямо-

угольныхъ декартовыхъ координатъ съ началомъ въ O . Мы всегда будемъ предполагать, что уголъ ψ отсчитывается отъ лицевой стороны zOx къ лицевой сторонѣ zOy , т. е. по направленію изобра-

Фиг. 29.



женной стрѣлки my . Тогда сферическіи и декартовы координаты будутъ связаны такими уравненіями: съ одной стороны —

$$(1) \quad \rho = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x};$$

а съ другой —

$$(2) \quad x = \rho \sin \varphi \cos \psi; \quad y = \rho \sin \varphi \sin \psi; \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Точно также въ цилиндрической системѣ возьмемъ Oz , xOy и zOx (фиг. 29) за соответственныя ось и плоскости прямоугольныхъ декартовыхъ координатъ. Всегда будемъ предполагать, что уголъ θ отсчитывается отъ Oz къ Oy по начерченной стрѣлкѣ. Тогда имѣемъ слѣдующія двѣ системы уравненій:

$$(3) \quad r = + \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}; \quad z = z$$

и

$$(4) \quad x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad z = z.$$

Вообще за координаты точки мы можемъ принять любыя три функціи

$$(5) \quad q_1 = f_1(x, y, z); \quad q_2 = f_2(x, y, z); \quad q_3 = f_3(x, y, z);$$

отъ декартовыхъ координатъ, если только изъ предыдущихъ трехъ уравненій мы въ состояніи опредѣлить x, y, z какъ функціи отъ q_1, q_2, q_3 :

$$(6) \quad x = \alpha(q_1, q_2, q_3); \quad y = \beta(q_1, q_2, q_3); \quad z = \gamma(q_1, q_2, q_3)$$

Другими словами, ни одно изъ уравненій (5) не должно противорѣчить другимъ и ни одно не должно быть слѣдствіемъ другихъ.

Положимъ какую либо координату, напр q_1 , равную постоянной C_1 , тогда получимъ уравненіе некоторой поверхности

$$q_1 = f_1(x, y, z) = C_1,$$

называемой координатною. Если постоянной C_1 станемъ давать всевозможныя значенія, для которыхъ поверхность остается действительною, то будемъ имѣть семейство координатныхъ поверхностей, соответствующихъ координатъ q_1 . Такихъ семействъ будетъ три по числу координатъ. Положеніе точки и опредѣляется, какъ пересѣченіе трехъ координатныхъ поверхностей различныхъ семействъ. Если эти три поверхности при любомъ положеніи точки ихъ пересѣченія взаимно ортогональны, то система координатъ называется ортогональною.

Для декартовыхъ координатъ названныя поверхности будутъ (фиг. 26 и 27) плоскостями параллельными основнымъ yOz , zOx и xOy .

Для сферическихъ координатъ (фиг. 28) поверхности $\rho = \text{const.}$ представляютъ собою семейство концентрическихъ сферъ; поверхности $\varphi = \text{const.}$ даютъ семейство конусовъ вращенія съ общою вершиною O и съ общою осью OP , но съ различными углами раскрыванія; поверхности $\psi = \text{const.}$ это семейство плоскостей, пересѣкающихся по OP .

Для цилиндрическихъ координатъ (фиг. 29) поверхности $z = \text{const.}$ даютъ семейство параллельныхъ плоскостей; поверхности $\rho = \text{const.}$ — семейство цилиндровъ вращенія съ общою осью; поверхности $\theta = \text{const.}$ семейство плоскостей, проходящихъ черезъ точку и ту же прямую Oz .

Очевидно, обѣ эти системы координатъ ортогональны.

Если положить двѣ координаты, напр. q_2 и q_3 , равными постояннымъ, то получимъ, вообще говоря, кривую линію:

$$q_2 = f_2(x, y, z) = C_2; \quad q_3 = f_3(x, y, z) = C_3,$$

пересѣченіе двухъ координатныхъ поверхностей различныхъ семействъ. Эта линія называется координатною, при томъ координатною, соответствующею третьей координатѣ, q_1 , такъ какъ въ различныхъ точкахъ линіи мѣняется значеніе лишь послѣдней координаты. Положительнымъ направленіемъ координатной линіи считается то, въ которомъ значенія соответственной координаты увеличиваются. Черезъ каждую точку пространства проходятъ три координатныя линіи; если система ортогональная, то эти линіи взаимно ортогональны.

Если хотя одна из координатных линий кривая, система координат называется криволинейною.

Для декартовых координат (фиг. 26 и 27) координатными линиями служат прямая, параллельная осям Ox , Oy , Oz .

Для сферических координат (фиг. 28) координатные линии

$$\varphi = \text{const.}; \quad \psi = \text{const.},$$

прямая, проходящая через начало; координатные линии

$$\psi = \text{const.}; \quad \rho = \text{const.},$$

окружности с центром в начале; плоскости их проходят через OP ; координатные линии

$$\rho = \text{const.}; \quad \varphi = \text{const.},$$

окружности, центры конь лежат на OP , а плоскости перпендикулярны къ OP .

Для цилиндрических координат (фиг. 29) координатными линиями служат прямая, параллельная Oz ($r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$); прямая, перпендикулярная къ Oz ($r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$) и окружности с центрами на Oz ($r = \text{const.}$, $z = \text{const.}$).

На каждой из координатных линий стрѣлкою означено положительное направление.

Через каждую точку среды проходят, какъ мы видѣли, три координатныхъ линии: система трехъ касательныхъ, проведенныхъ въ разсматриваемой точкѣ къ этимъ линиямъ въ положительныхъ направленияхъ, называется системою осей криволинейныхъ координатъ, соответствующею взятой точкѣ. Для декартовыхъ координатъ система осей въ любой точкѣ (фиг. 26 и 27) параллельна основнымъ Ox , Oy , Oz . Для сферическихъ (фиг. 28) и цилиндрическихъ (фиг. 29) направления осей въ m означены буквами α , β , γ ; λ , μ , ν ; причеиъ α соответствуетъ координатѣ ρ ; β — φ ; γ — ψ ; а для цилиндрическихъ λ соответствуетъ z , μ — r , ν — θ .

Если съ помощью цилиндрическихъ координатъ опредѣляется положение точки на плоскости xOy , т. е. если координата z постоянно равна нулю, то система координатъ называется полярною.

40. Конечныя уравненія движенія. Траекторія. Когда точка движется въ средѣ, то координаты ея q_1 , q_2 , q_3 не остаются постоянными, а будутъ некоторыми функциями времени t :

$$(7) \quad q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad q_3 = f_3(t).$$

Написанные уравнения называются конечными уравнениями движения точки: задание их вполне определяет движение точки. Геометрическое место точек среды, с которыми движущаяся точка совпадает в различные моменты времени, носит название пути, описываемого точкою в среде, или траектории.

Два уравнения траектории:

$$\varphi_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad \varphi_2(q_1, q_2, q_3) = 0,$$

получаются изъ (7) исключениемъ времени.

Примеры: а) Уравнение движения в декартовых прямоугольных координатахъ:

$$x = at + \alpha; \quad y = bt + \beta; \quad z = ct + \gamma.$$

Траектория

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}.$$

линия, проходящая через точку (α, β, γ) ; косинусы угловъ ея съ осями координатъ a, b и c .

б) Уравнения движения в тѣхъ же координатахъ

$$x = a \sin at \cos at; \quad y = b \sin^2 at; \quad z = c \cos at.$$

Траектория — пересѣчение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

гиперболическимъ цилиндромъ:

$$\frac{y}{b} + \frac{z^2}{c^2} = h,$$

в) Уравнения движения в сферическихъ координатахъ.

$$\rho = at + \alpha; \quad \varphi = bt + \beta; \quad \psi = ct + \gamma,$$

Траектория

$$\frac{\rho - \alpha}{a} = \frac{\varphi - \beta}{b} = \frac{\psi - \gamma}{c}.$$

Если $c = 0$, это Архимедова спираль.

г) Уравнения движения в цилиндрическихъ координатахъ:

$$r = at + \alpha; \quad z = bt + \beta; \quad \varphi = ct + \gamma.$$

Траекторія:

$$r = a + \frac{z - a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{z - a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{z - a}{b}.$$

Если $a = 0$, это винтовая линия на цилиндрѣ ($r = a$); ходъ винтовой линии равенъ $\frac{b}{c} 2\pi$. Если $b = 0$, получается Архимедова спираль; если $c = 0$, прямая

Въ некоторыхъ случаяхъ представляется удобнымъ задать координаты точки, какъ функции отъ длины дуги траекторіи, s , а саму величину s задать функциею времени t , т. е.

$$(8) \quad q_1 = \varphi_1(s); \quad q_2 = \varphi_2(s); \quad q_3 = \varphi_3(s). \quad s = \psi(t).$$

Длина дуги траекторіи считается здѣсь отъ точки съ координатами $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$; при томъ положительное направление дуги идетъ въ ту сторону траекторіи, гдѣ лежатъ точки, для коихъ аргументъ s больше нуля.

Какимъ образомъ уравненія (7) замѣнить (8), увидимъ впоследствии, возможность же такой замѣны ясна само собою.

Примѣромъ для (8) могутъ служить уравненія движения точки по окружности радіуса R :

$$x = R \cos \frac{s}{R}; \quad y = R \sin \frac{s}{R}; \quad z = 0; \quad s = a + bt + ct^2.$$

41. Перемѣщеніе точки. Скорость точки. Радіусъ-векторъ движущейся точки, проведенный изъ какого либо неподвижнаго полюса (напр. начала координатъ) измѣняется съ теченіемъ времени по величинѣ и по направленію, т. е. онъ (§ 31) векторъ-функция времени. Въ такомъ случаѣ траекторія точки служитъ географомъ этого вектора. Хорда траекторіи mm' , соединяющая два положенія точки для моментовъ t и t' и называемая перемѣщеніемъ точки за промежутокъ времени $t' - t$, представляютъ собою геометрическое приращеніе радіуса вектора, соответствующее приращенію времени $t' - t$. Предѣлъ отношенія перемѣщенія къ соответствующему промежутку времени въ томъ предположеніи, что t' приближается къ t , или, что то же, геометрическая производная по времени отъ радіуса вектора точки называется скоростью точки въ моментъ t . Координатами радіуса вектора ρ (§ 39) служатъ декартовы координаты x, y, z движущейся точки, слѣд. координатами скорости v будутъ:

$$(9) \quad v \cos(\alpha) = \frac{dx}{dt}; \quad v \cos(\beta) = \frac{dy}{dt}; \quad v \cos(\gamma) = \frac{dz}{dt}.$$

Вектор v направлен (§ 31) по касательной къ траекторіи и при томъ въ ту сторону, въ которую происходитъ движеніе. По численной величинѣ скорость равняется производной по времени отъ длины дуги s траекторіи;

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (10)$$

Когда векторъ v постояненъ по направленію, траекторія — прямая линія; когда скорость постоянна по величинѣ, движеніе называется равномернымъ. Изъ (10) при $v = \text{const.}$ а вытекаетъ:

$$s = at + s_0,$$

гдѣ s_0 длина дуги, соответствующая положенію точки для момента $t=0$. Отсюда выводимъ:

$$v = \frac{s - s_0}{t},$$

т. е. для равномернаго движенія скорость численно равняется длинѣ дуги траекторіи, проходимой точкою въ единицу времени.

Скорость, какъ производная по времени отъ радиуса вектора, представляетъ собою величину, неоднородную съ радиусомъ вектора, т. е. длиною. Единица скорости сложная: ея размѣры зависятъ отъ выбора единицы длины и единицы времени. Для при-
ятыхъ нами единицъ длины и времени единица скорости выра-
жается символомъ:

$$\frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда средн. врем.}}, \quad (11)$$

т. е. словами, за единицу скорости принимается скорость — „сантиметръ въ секунду средняго времени“. Въ движеніи равномерномъ точка съ такою скоростью проходить въ единицу времени единицу длины, т. е. въ секунду средняго времени одинъ сантиметръ. Символъ (11) указываетъ, какъ размѣры единицы скорости мѣняются въ зависимости отъ размѣровъ единицъ длины и времени, а именно величина единицы скорости прямопропорціональна величинѣ единицы длины и обратнопропорціональна величинѣ единицы времени. Такъ скорость — „метръ въ секунду“ въ 100 разъ больше скорости „миллиметръ въ секунду“ въ 10 разъ меньше девятой части единицы, а скорость — „сантиметръ въ минуту“ составляетъ $\frac{1}{60}$ этой единицы.

Примѣры. а) Уравненія движенія: $x = at + x_0$; $y = bt + y_0$; $z = ct + z_0$.

$$v \cos(\alpha x) = a; \quad v \cos(\alpha y) = b; \quad v \cos(\alpha z) = c.$$

Движение прямолинейное и равномерное со скоростью

$$v = + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

б) Уравнения движения в плоскости: а) $x = a \cos \omega t$,
 $y = a \sin \omega t$.

$$v \cos(\alpha x) = -a\omega \sin \omega t; \quad v \cos(\alpha y) = a\omega \cos \omega t,$$

Движение равномерное по окружности со скоростью $v = a\omega$.

в) Уравнения движения: $x = a \sin \alpha t \cos \beta t$; $y = a \sin \alpha t \sin \beta t$;
 $z = a \cos \alpha t$.

$$v \cos(\alpha x) = a\alpha \cos \alpha t \cos \beta t - a\beta \sin \alpha t \sin \beta t;$$

$$v \cos(\alpha y) = a\alpha \cos \alpha t \sin \beta t + a\beta \sin \alpha t \cos \beta t;$$

$$v \cos(\alpha z) = -a\alpha \sin \alpha t.$$

$$v = + a \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 \alpha t}.$$

42. Проекция скорости точки на неподвижное и подвижное направление. Станем разсматривать проекцию m_x движущейся точки m на ось x -овъ; эта проекция одновременно съ точкою m будетъ двигаться въ той же средѣ. Координата x представляетъ собою длину дуги траекторіи точки m_x , если за начало дуги взять начало координатъ; слѣд. производная $\frac{dx}{dt}$ можетъ быть разсматриваема, какъ скорость точки m_x . А потому равенства (9) говорятъ, что проекция скорости точки на координатную ось равняется скорости проекціи этой точки на ту же ось.

То же справедливо и для проекціи скорости на любое неподвижное направление l , такъ какъ изъ § 33 для проекціи скорости на неподвижное направление l имѣемъ такое выражение:

$$(12) \quad v \cos(\alpha l) = \frac{d}{dt} [\rho \cos(\rho l)];$$

а $\rho \cos(\rho l)$ и будетъ длина дуги прямолинейной траекторіи точки, если за начало дугъ взять проекцію начала координатъ на l .

Если направление l подвижное, то, по (40) того же § 33 найдемъ:

$$(13) \quad v \cos(\alpha l) = \frac{d}{dt} [\rho \cos(\rho l)] - \dot{\rho} \sin(\rho l).$$

Геометрическая производная по времени $\dot{\rho}$ здѣсь будетъ скоростью конца индекса или орта подвижнаго направления l . Траек-

торией этой точки, очевидно, служить некоторая сферическая кривая, а потому всегда

$$\dot{\mathbf{u}} \perp U, \quad (14)$$

такъ какъ касательная къ сферѣ перпендикулярна къ радиусу точки касанія. Скорость $\dot{\mathbf{u}}$ будемъ называть поворотною скоростью направленія U .

Привѣрь: Уравненія движенія точки:

$$x = a \sin \alpha t \cos \beta t; \quad y = a \sin \alpha t \sin \beta t; \quad z = a \cos \alpha t.$$

Подвижное направленіе U опредѣляется косинусами съ осями координатъ:

$$\lambda = \sin p \cos \beta t; \quad \mu = \sin p \sin \beta t; \quad \nu = \cos p;$$

гдѣ p некоторая постоянная.

Тогда

$$\rho \cos(p, U) = x\lambda + y\mu + z\nu = a \cos(\alpha t - p);$$

$$\dot{\mathbf{u}} \cos(\dot{\mathbf{u}}, x) = \frac{d\lambda}{dt} = -\beta \sin p \sin \beta t; \quad \dot{\mathbf{u}} \cos(\dot{\mathbf{u}}, y) = \frac{d\mu}{dt} = \beta \sin p \cos \beta t;$$

$$\dot{\mathbf{u}} \cos(\dot{\mathbf{u}}, z) = \frac{dv}{dt} = 0.$$

$$\rho \dot{\mathbf{u}} \cos(p, \dot{\mathbf{u}}) = x \frac{d\lambda}{dt} + y \frac{d\mu}{dt} + z \frac{dv}{dt} = 0.$$

А потому

$$\rho \cos(p, \dot{\mathbf{u}}) = a \sin \alpha t = \rho.$$

43. Проекціи скорости на оси криволинейныхъ координатъ. По-
ложимъ, что положеніе точки опредѣляется не декартовыми коор-
динатами x, y, z , а криволинейными q_1, q_2, q_3 . Составимъ выра-
женія для проекцій скорости на оси этихъ координатъ (§ 39).
Прежде всего посмотримъ, какой видъ приметъ выраженіе для
величины квадрата скорости точки. Эту величину для сокращенія
назовемъ черезъ h .

$$2h = v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (15)$$

Штрихами означены производныя по времени. Изъ (7) мы
возьмемъ:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial x}{\partial q_3} q_3'; \\
 y' &= \frac{\partial y}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial y}{\partial q_3} q_3'; \\
 (16) \quad z' &= \frac{\partial z}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial z}{\partial q_3} q_3'.
 \end{aligned}$$

Условимся, как сделано здесь, означать частные производныя круглыми буквами; а полныя производныя прямыми. Замѣтимъ, что, если разсматривать x' , y' , z' какъ функции шести аргументовъ $q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3'$, то легко видѣть, что

$$(17) \quad \frac{\partial x'}{\partial q_i'} = \frac{\partial x}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q_i'} = \frac{\partial y}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q_i'} = \frac{\partial z}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Первое изъ этихъ равенствъ можно написать такъ:

$$\frac{\partial}{\partial q_i'} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} x = \frac{dx}{dq_i},$$

откуда выводимъ такое инвариантное правило для вышенаписанныхъ равенствъ (17): символъ $\frac{d}{dt}$ сокращается, какъ множитель.

Подставляя изъ (16) въ (15), получимъ:

$$(18) \quad 2h = A_1^2 q_1'^2 + A_2^2 q_2'^2 + A_3^2 q_3'^2 + 2B_{23} q_2' q_3' + 2B_{31} q_3' q_1' + 2B_{12} q_1' q_2',$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
 A_i^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2; \\
 (19) \quad B_{ij} &= \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j};
 \end{aligned}$$

причемъ $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; i$ и j различны.

Координатную линію $q_2 = \text{const.}, q_3 = \text{const.}$ и соответствующую ей ось означимъ цифрою 1, остальные двѣ цифрами 2 и 3.

Косинусы угловъ осей съ координатными декартовыми осями Ox , Oy и Oz означимъ по нижеслѣдующей схемѣ

	1	2	3
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Когда, по истеченіи времени dt , движущаяся точка пройдетъ разстояніе $ds = vdt$, она перейдетъ съ координатной поверхности на поверхность $q_1 + dq_1 = q_1 + q_1' dt$, слѣд. точка пересѣченія координатной поверхности q_1 съ координатной линіей 1 пройдетъ по этой линіи нѣкоторое разстояніе, которое назовемъ $d\sigma_1$. Не трудно видѣть, что проекція $d\sigma_1$ на Ox равняется частному дифференціалу $(dx)_1$ координаты x , соответствующему переменной q_1 , такъ какъ при движеніи по координатной линіи 1 остальные двѣ координаты остаются постоянными. Слѣд., по принятымъ обозначеніямъ

$$d\sigma_1 \cos(d\sigma_1, x) = \alpha_1 d\sigma_1 = (dx)_1 = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1.$$

Подобнымъ образомъ:

$$d\sigma_1 \cos(d\sigma_1, y) = \beta_1 d\sigma_1 = (dy)_1 = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1;$$

$$d\sigma_1 \cos(d\sigma_1, z) = \gamma_1 d\sigma_1 = (dz)_1 = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1.$$

Возвышая полученныя выраженія въ квадратъ, складывая и извлекая корень квадратный, найдемъ

$$d\sigma_1 = A_1 dq_1, \tag{20}$$

гдѣ $A_1 = \sqrt{A_1^2}$, если направленіе $d\sigma_1$ беремъ по соответственной оси, т. е. въ ту сторону по линіи 1, въ которую координата q_1 увеличивается. Пользуясь (20) изъ предъидущихъ выраженій, по-

$$\alpha_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial x}{\partial q_1}; \quad \beta_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial y}{\partial q_1}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial z}{\partial q_1}. \tag{21}$$

Совершенно такимъ же способом находимъ:

$$d\sigma_2 = A_2 dq_2, \quad d\sigma_3 = A_3 dq_3;$$

и

$$(21') \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial x}{\partial q_2}; & \beta_2 &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial y}{\partial q_2}; & \gamma_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial z}{\partial q_2}; \\ \alpha_3 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial x}{\partial q_3}; & \beta_3 &= \frac{1}{A_3} \frac{\partial y}{\partial q_3}; & \gamma_3 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial z}{\partial q_3}. \end{aligned}$$

Полученныя выраженія даютъ возможность представить формулу (18) подъ такимъ видомъ:

$$(22) \quad \begin{aligned} 2h \cdot dt^2 &= ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_3^2 + 2d\sigma_2 d\sigma_3 \cos(23) + 2d\sigma_1 d\sigma_3 \cos(31) + \\ &+ 2d\sigma_1 d\sigma_2 \cos(12). \end{aligned}$$

Здѣсь для сокращенія положено:

$$\cos(23) = \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = \cos(d\sigma_2 d\sigma_3);$$

$$\cos(31) = \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = \cos(d\sigma_3 d\sigma_1);$$

$$\cos(12) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = \cos(d\sigma_1 d\sigma_2).$$

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній, приступимъ къ вычисленію проекцій скорости на оси; начнемъ съ оси 1.

$$v \cos(v 1) = x' \alpha_1 + y' \beta_1 + z' \gamma_1,$$

или по (21), (17) и (15):

$$(23) \quad \begin{aligned} v \cos(v 1) &= \frac{1}{A_1} \left(x' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \\ &= \frac{1}{A_1} \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_1'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_1'} \right) = \frac{1}{A_1} \frac{dh}{dq_1'}. \end{aligned}$$

Такимъ же путемъ найдемъ:

$$(23') \quad v \cos(v 2) = \frac{1}{A_2} \frac{dh}{dq_2'}; \quad v \cos(v 3) = \frac{1}{A_3} \frac{dh}{dq_3'}.$$

Для сферическихъ координатъ выражение h будетъ:

$$2h = \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi \psi'^2;$$

след., полагая $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$, имѣемъ $A_1 = 1$, $A_2 = \rho$, $A_3 = \rho \sin \varphi$, $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. А потому при обозначеніяхъ § 39

$$v \cos(\nu \alpha) = \frac{d\rho}{dt}; \quad v \cos(\nu \beta) = \rho \frac{d\varphi}{dt}; \quad v \cos(\nu \gamma) = \rho \sin \varphi \frac{d\psi}{dt}. \quad (24)$$

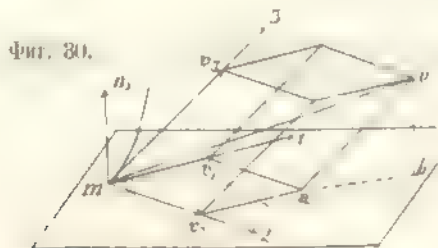
Для цилиндрическихъ координатъ

$$2h = z'^2 + r'^2 + r^2 \theta'^2,$$

откуда

$$v \cos(\nu \lambda) = \frac{dz}{dt}; \quad v \cos(\nu \mu) = \frac{dr}{dt}; \quad v \cos(\nu \nu) = r \frac{d\theta}{dt}. \quad (25)$$

44. Составляющія скорости по осямъ криволинейныхъ координатъ. Разложимъ векторъ, изображающій скорость v точки, на три составляющіе по осямъ 1, 2, 3. По § 5 эти составляющіе векторы будутъ ребрами параллелепипеда, діагональю коего служитъ v .



Пусть (фиг. 30) векторъ v изображаетъ скорость точки m , векторы v_1, v_2, v_3 — искомые составляющіе. Плоскость mt, v_2 служитъ касательною плоскостью къ координатной поверхности q_3 въ точкѣ m . Если изъ конца v опустимъ на эту плоскость перпендикуляръ vb , то онъ будетъ параллеленъ нормалю n_3 къ поверхности q_3 въ точкѣ m . Построенный векторъ av очевидно, представляетъ собою проецію скорости v на нормаль n_3 . Мы будемъ знать эту проецію, то длина вектора av или, что то же, $av = v \cos \varphi$, если vb раздѣлить на $\cos \varphi$, т. е. косинусъ угла между осью 3 и v . Такимъ же путемъ можемъ опредѣлить и другіе составляющіе.

Обозначимъ косинусы угловъ нормалей къ координатнымъ поверхностямъ q_1, q_2, q_3 единичными осями такою схемою:

	n_1	n_2	n_3
x	λ_1	λ_2	λ_3
y	μ_1	μ_2	μ_3
z	ν_1	ν_2	ν_3

Нормаль n , перпендикулярна къ 2 и 3, слѣд., по (21):

$$\lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_2} + \nu_1 \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_3} + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_3} + \nu_1 \frac{\partial z}{\partial q_3} = 0.$$

Изъ этихъ уравненій легко находимъ:

$$\frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} - \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} = \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} - \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} = k.$$

Здѣсь k — коэффициентъ пропорциональности равный, какъ нетрудно убѣдиться, $\pm \frac{1}{\sqrt{A_2^2 A_3^2 - B_{23}^2}}$.

Съ помощью вышенаписанныхъ значений для λ_1, μ_1, ν_1 косинусъ угла между 1 и n , вычислится по (21) такъ:

$$\cos(n, 1) = \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \beta_1 + \nu_1 \gamma_1 = \frac{k}{A_1} \Delta,$$

если чрезъ Δ означимъ определитель

$$\Delta = \sum_x \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}.$$

Проекція скорости v на n , окажется такою:

$$v \cos(\theta, n) = x' \lambda_1 + y' \mu_1 + z' \nu_1 = k \Delta q_1'.$$

если подставимъ предыдущія выраженія вмѣсто λ_1, μ_1, ν_1 , а вмѣсто x', y', z' ихъ выраженія изъ (16); коэффициенты у q_2' и q_3' обращаются въ нуль, какъ определители съ равными строками.

Теперь непосредственно находимъ.

$$v_1 = \frac{v \cos(\nu n_1)}{\cos(n, 1)} = A_1 q_1' \quad (26)$$

или по (20)

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt}.$$

Подобнымъ образомъ:

$$v_2 = A_2 q_2', \quad \frac{ds_2}{dt}; \quad v_3 = A_3 q_3' = \frac{ds_3}{dt} \quad (27)$$

Изъ функции h въ формулѣ (22) ясно показывается, что s является одною діагоналю параллелепипеда съ ребрами $\frac{ds_1}{dt}$, $\frac{ds_2}{dt}$, $\frac{ds_3}{dt}$ по 1, 2 и 3.

Когда система координатъ ортогональна въ алгебраическомъ выраженіи (26) и (27) является.

45. Преобразование уравненій движенія точки къ специальному виду. Если мы пожелаемъ привести уравненія движенія (7) къ специальному виду (8), то поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Изъ (15) имѣемъ:

$$ds = \pm \sqrt{2h} dt,$$

въ которой известная намъ функція времени (18). Двойной знакъ опредѣлится, если выберемъ положительное направленіе дугъ векторовъ. Взявши квадратуру

$$s = \text{const.} \pm \int \sqrt{2h} dt,$$

получимъ s , какъ функцію времени: $s = \psi(t)$. Произвольная постоянная \pm опредѣлится, когда выберемъ начало дугъ. Если за начало дугъ примемъ точку $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$, $f_3(t_0)$, то

$$s = \psi(t) = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{2h} dt.$$

Сочинивъ съ помощью этого добавочнаго уравненія время t и получимъ искомую группу (8).

46. Опредѣленіе движенія точки по данной скорости. Погонная скорость v предъидущемъ мы видѣли, какъ находится скорость по

данному движению; теперь скажемъ нѣсколько словъ объ обратномъ вопросѣ: какъ опредѣлить движение, если задана скорость.

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда скорость задана какъ векторъ-функція времени, т. е. когда даны

$$v \cos(\alpha) = \frac{dx}{dt} = f_1(t); \quad v \cos(\beta) = \frac{dy}{dt} = f_2(t);$$

$$v \cos(\gamma) = \frac{dz}{dt} = f_3(t).$$

Искомое движение опредѣлится, если мы найдемъ радиусъ векторъ движущейся точки какъ векторъ-функцію времени, т. е. найдемъ геометрической интегралъ отъ скорости. По § 34 получаемъ

$$x = \int f_1(t) dt; \quad y = \int f_2(t) dt; \quad z = \int f_3(t) dt$$

Задача наша неопредѣленная: существуетъ безчисленное множество движений, удовлетворяющихъ заданнымъ условіямъ. Если какое либо значеніе неопредѣленного интеграла $\int f_i(t) dt$ означимъ $\Phi_i(t)$ для $i = 1, 2, 3$, то одно изъ искомымъ движений, положимъ для точки $m(x, y, z)$, опредѣлится уравненіями.

$$x = C' + \Phi_1(t); \quad y = C'' + \Phi_2(t); \quad z = C''' + \Phi_3(t),$$

гдѣ C', C'', C''' нѣкоторыя постоянныя. Другое движение для какой либо другой точки $m_1(x_1, y_1, z_1)$ отличалось бы значеніями постоянныхъ.

$$x_1 = C'_1 + \Phi_1(t); \quad y_1 = C''_1 + \Phi_2(t); \quad z_1 = C'''_1 + \Phi_3(t).$$

Вычитая почленно полученные уравненія, находимъ:

$$x_1 - x = C'_1 - C'; \quad y_1 - y = C''_1 - C''; \quad z_1 - z = C'''_1 - C'''.$$

Эти равенства говорятъ, что векторъ mm_1 , соединяющій одновременныя положенія точекъ m и m_1 , постояненъ по величинѣ, и по направленію; слѣдъ во всѣхъ искомымъ движенияхъ точки описываютъ тождественныя траекторіи, и всѣ траекторіи получаются изъ одной какой нибудь, если каждой точкѣ послѣдней дать одно и то же перемѣщеніе. Такъ для разсмотрѣнныхъ нами двухъ траекторій перемѣщеніе это равняется

$$\sqrt{(C'_1 - C')^2 + (C''_1 - C'')^2 + (C'''_1 - C''')^2}.$$

Задача станет вполне определенной, если мы дадим начальное положение точки, т. е. координаты ее x_0, y_0, z_0 для момента t_0 . Тогда уравнения движения примут вид:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f_1(t) dt; \quad y = y_0 + \int_{t_0}^t f_2(t) dt; \quad z = z_0 + \int_{t_0}^t f_3(t) dt.$$

Примеры: Скорость задана своими проекциями:

$$\frac{dx}{dt} = a \sin \alpha t \cos \beta t; \quad \frac{dy}{dt} = b \sin \alpha t \sin \beta t; \quad \frac{dz}{dt} = c \cos \alpha t.$$

Для момента $t = 0$ точка в начале координат.

Искомые уравнения движения:

$$x = \frac{a}{\alpha + \beta} \sin(\alpha + \beta)t - \frac{a}{\alpha - \beta} \sin(\alpha - \beta)t,$$

$$y = \frac{b}{\alpha + \beta} \sin(\alpha + \beta)t - \frac{b}{\alpha - \beta} \sin(\alpha - \beta)t,$$

$$z = \frac{c}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Въ болѣ сложныхъ случаяхъ проекции скорости могутъ быть заданы какъ функціи не только времени, но и координатъ точки. Кроме того, координаты точки могутъ быть и криволинейныя. Тогда, вообще говоря, мы будемъ имѣть три уравнения, связывающихъ три неизвѣстныхъ функціи времени q_1, q_2, q_3 :

$$f_1(q_1', q_2', q_3', q_1, q_2, q_3, t) = 0; \quad f_2(q_1', q_2', q_3', q_1, q_2, q_3, t) = 0;$$

$$f_3(q_1', q_2', q_3', q_1, q_2, q_3, t) = 0.$$

Вопросъ сводится къ интегрированію такой системы трехъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Три интеграла системы будутъ заключать въ себѣ три произвольныя постоянныя. Для определенности рѣшенія опять нужно задать еще три граничныя условія, напр. начальное положеніе точки для момента $t = t_0$.

Къ такому типу относятся задачи о такъ называемыхъ погонныхъ линияхъ или линияхъ бѣгства. Мы рассмотримъ для примѣра, простѣйшую изъ нихъ: определить траекторію точки A , движущейся въ плоскости съ постоянной скоростью v если скорость этой точки всегда направлена въ точку B равномерно со скоростью u и движущуюся по прямой въ той же плоскости

Примем (фиг. 31) траекторию точки B за Ox и направление « за положительное направление этой оси. Заметим, что когда точка B была на бесконечности в отрицательном направлении Ox , скорость точки A должна была быть параллельна этому отрицательному направлению; когда точка B уйдет в положительном направлении на бесконечность, скорость точки A станет параллельною положительному направлению; след для некоторого промежуточного момента точка A должна занимать такое положение A_0 , для которого скорость ее перпендикулярна к Ox . Касательную к искомой траектории в этой точке A и примем за Oy .



В тот момент, когда A находилась в A_0 , по условию задачи, B должна была быть в O ; след если A и B изображают одновременные положения точки и если время считать с того момента, когда A была в A_0 , то по равномерности обеих движений:

$$\frac{A_0 A}{v} = \frac{OB}{u} = t$$

Из ΔABC легко видеть, что

$$r \cos(\alpha) = \frac{dr}{dt} = r \frac{CB}{AB} = r \frac{ut}{AB} = r$$

$$r \cos(\beta) = \frac{dy}{dt} = -r \frac{AC}{AB} = -r \frac{v}{AB}$$

Разделив почленно эти равенства, найдем:

$$\frac{dr}{dy} = \frac{-ut + r}{y}$$

Исключим t из этого уравнения и обозначим $A_0 A$ через s , а отношение скоростей $\frac{u}{v}$ через ε , тогда получим:

$$r - y \frac{dx}{dy} = s.$$

Продифференцируемъ, принявъ за независимую переменную y :

$$\epsilon \frac{dx}{dy} = -y \frac{dx^2}{dy^2}. \quad (27)$$

За начало y вась взята точка A_0 и положительное направление для дуги идетъ отъ A_0 къ A ; ясно, что съ увеличениемъ x координата y уменьшается, слѣд. по (15) при $dx = 0$:

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Пользуясь этимъ равенствомъ, вмѣсто (27) получимъ уравненіе

$$\epsilon \frac{dy}{y} = \frac{\frac{d^2x}{dy^2} dy}{\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}}.$$

Интегрируя его, найдемъ:

$$\epsilon \log y + C = \log \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} \right\}.$$

Пусть расстояние $OA_0 = a$; тогда произвольная постоянная C легко задается, если замѣтимъ, что для $A_0: y = a, \frac{dx}{dy} = 0$; а потому предыдущее равенство даетъ:

$$\left(\frac{y}{a} \right)^\epsilon = \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Приравнявъ другъ другу обѣ этия величины, найдемъ

$$\frac{y}{a} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} - \frac{dx}{dy}.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій слѣдуетъ, съ одной стороны

$$2 \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{a} \right)^\epsilon - \left(\frac{y}{a} \right)^{-\epsilon};$$

съ другой

$$2 \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \left(\frac{y}{a} \right)^\epsilon + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\epsilon}. \quad (28)$$

Первое уравненіе тотчасъ же интегрируется; если ϵ не равно единицѣ, найдемъ:

$$2x + C_1 = \frac{y^{\epsilon+1}}{a^\epsilon(\epsilon+1)} - \frac{y^{-\epsilon}}{a^{-\epsilon}(1-\epsilon)},$$

а если $\varepsilon = 1$, то получим:

$$2x + C_2 = \frac{y^2}{2a} - a \log y.$$

Определим произвольные постоянные из того условия, что $r = 0$ для $y = a$, найдем уравнения траекторий в окончательном виде

$$2x - 1 - \frac{a^2}{y^2} = \frac{y^{2+\varepsilon}}{a^2(1+\varepsilon)} - \frac{y}{a^2(1-\varepsilon)},$$

или

$$2x + \frac{a}{2} = \frac{y^2}{2a} - a \log \frac{y}{a}.$$

Заметим, что расстояние между точками

$$AB = \sqrt{A^2 + B^2} = 1 \frac{dr}{dy^2},$$

т. е. по (28)

$$AB = \pm \frac{1}{2} \left[\frac{y^{1+\varepsilon}}{a^2} + \frac{a^2}{y^{2-1}} \right].$$

Когда $\varepsilon < 1$, ось x -овая служит асимптотой траектории; при том же $\varepsilon > 1$ расстояние между точками бесконечно возрастает с приближением y к нулю, а для $\varepsilon = 1$ оно стремится к пределу $\frac{a}{2}$.

Когда $\varepsilon < 1$, то траектория пересекает ось x -овую, и здесь обе точки A и B встречаются.

47. Скорость линейная, обобщенная, угловая, септоральная.

Если какая либо величина зависит от времени, то часто аналитическую производную от нея по времени называют скоростью, прибавляя к этому названию какойнибудь эпитет. Так

Фиг. 32.



скорость нами раньше рассмотренную называют иногда скоростью линейною, так как она служит производною по времени от длины линии или дуги траектории. Производную по t от какойлибо криволинейной координаты q называют скоростью обоб-

щен по ω . Если какой либо уголъ, напр. сферическая координата ψ , измѣняется во времени, то производная отъ него по t называется угловою скоростью.

Пусть (фиг. 32) точка движется въ плоскости и описываетъ траекторію $I_0 I A'$, тогда площадь Σ сектора $A_0 O A$, ограниченного постоянною прямою $O P$, траекторіею и переменнымъ радіусомъ векторомъ $r = O I$ точки, будетъ функциею времени. Производная

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \text{Пред.} \left\{ \frac{\Delta\Sigma}{\Delta t} \right\} \Delta t = 0$$

несить названіе секторіальной скорости. Такъ какъ

$$\Delta\Sigma \text{ безк мал сектору } A O A = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

если $\theta = \angle P O A$, то очевидно

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (20)$$

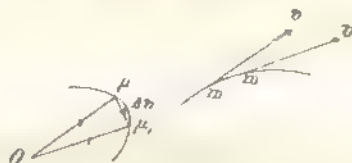
Конечно, всё эти скорости сходны между собою лишь по названію и, вообще говоря, величины разнородныя. Такъ напр. единицею угловой скорости служить $\frac{1}{\text{сек. сред. вр.}}$; единицею секторіальной скорости $\frac{\text{сантим.}^2}{\text{сек. сред. вр.}}$; ни одна изъ этихъ единицъ не однородна съ (11).

ГЛАВА II.

Годографъ скорости точки. Ускорение точки.

48. **Годографъ скорости точки.** Станемъ (фиг. 33) изъ начала координатъ O проводить векторы $O\mu$ геометрически равные вектору, изображающему скорости v движущейся точки m (x, y, z). Тогда геометрическое мѣсто точекъ μ или, что то же, траекторія подвижной точки μ и будетъ годографомъ для векторъ-функціи времени v .

Фиг. 33.



Кривая эта впервые была разсмотрѣна англійскимъ ученымъ Гамильтономъ ея геометрическія свойства наглядно представляютъ законъ измѣненія скорости со временемъ. Если координаты точки μ означимъ ξ, η, ζ , то по (33) § 31 и (9) § 41 имѣемъ:

$$(1) \quad \xi = \frac{dx}{dt}; \quad \eta = \frac{dy}{dt}; \quad \zeta = \frac{dz}{dt};$$

такъ какъ радиусъ векторъ $O\mu$ геометрически равенъ вектору v . Пусть уравненія движенія точки m

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t);$$

тогда уравненія движенія точки μ будутъ:

$$\xi = \frac{df_1(t)}{dt} = f_1'(t); \quad \eta = f_2'(t); \quad \zeta = f_3'(t).$$

Исключая изъ послѣднихъ уравненій время, и найдемъ два уравненія годографа.

$$\psi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0; \quad \psi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Примеры: а) Уравненія движенія точки m

$$x = a, \quad y = bt + c, \quad z = qt^2 + ct + t$$

Уравненія движенія точки μ :

$$\xi = 0; \quad \eta = b; \quad \zeta = 2qt + c.$$

Годографъ скорости—прямая: $\xi = 0, \eta = b$.

б) Уравненія движенія точки m :

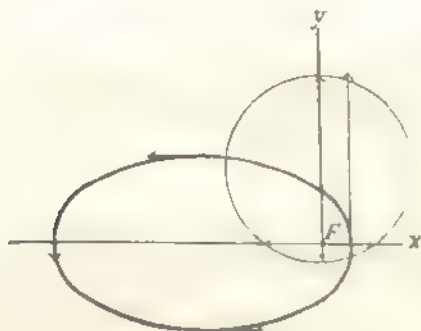
$$x = a \sin \lambda \cos \beta t; \quad y = a \sin \lambda \sin \beta t; \quad z = a \cos \lambda$$

гдѣ λ некоторая постоянная.

Уравненія движенія точки μ :

$$\xi = -a\beta \sin \lambda \sin \beta t; \quad \eta = a\beta \sin \lambda \cos \beta t; \quad \zeta = 0.$$

Годографъ скорости—окружность: $\xi^2 + \eta^2 = a^2 \beta^2 \sin^2 \lambda, \zeta = 0$.



Фиг. 34.

Опредѣлимъ годографъ скорости для такого движенія: точка m описываетъ коническое сѣченіе съ постоянною секторальною скоростью вкругъ фокуса этого сѣченія.

Плоскость траектории или орбиты точки примемъ за плоскость xOy уравненіе орбиты въ полярныхъ координатахъ, отнесенное къ фокусу F и оси Fx , будетъ:

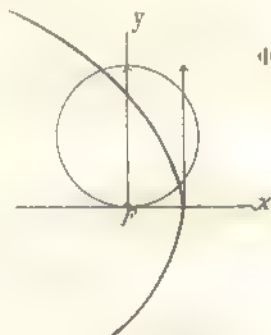
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta};$$

— параметръ, а e —эксцентриситетъ орбиты: $e < 1$ для эллипса; $e = 1$ для па-

работы; $e > 1$ для гиперболы. Постоянство секторальной скорости по (29) § 47 выразится такъ:

$$(2) \quad r^2 \theta' = \frac{p^2 \theta'}{(1 + e \cos \theta)^2} = A,$$

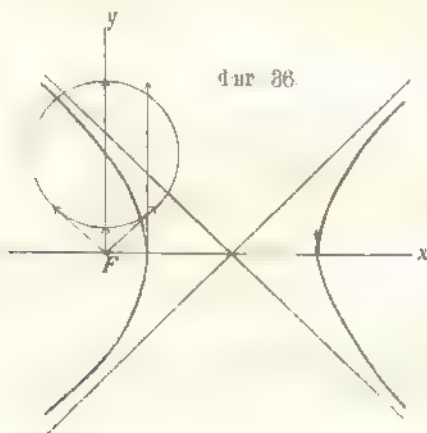
гдѣ A некоторая постоянная.



Фиг. 35.

Уравненія движенія точки $m(x, y)$, если за начало взять фокусъ и Fx совпадетъ съ осью орбиты, а Fy направлена соответственнымъ образомъ, будутъ:

$$x = \frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta}; \quad y = \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta};$$



Фиг. 36.

здѣсь θ функція времени, которую надо опредѣлить, интегрируя уравненіе (2), но голографъ можетъ быть найденъ и безъ помощи этого интеграла. Уравненія движенія точки μ по (1):

$$\xi = \frac{dx}{dt} = - \frac{p \sin \theta \theta'}{(1 + e \cos \theta)^2};$$

$$\zeta = \frac{dy}{dt} = \frac{p (\cos \theta + e \theta')}{(1 + e \cos \theta)^2}.$$

Пользуясь (2), исключаемъ θ' :

$$\xi = - \frac{A}{p} \sin \theta; \quad \zeta = \frac{A}{p} (\cos \theta + e).$$

Если отсюда исключить θ , то и получится уравнение годографа.

$$\xi^2 + \left(\zeta - \frac{A}{p} e \right)^2 = \frac{A^2}{p^2}.$$

Годографъ оказывается окружностью, пересѣкающею ось Fx , когда $e < 1$, касающеюся оси Fx когда $e = 1$, и лежащею вѣдь оси Fx , когда $e > 1$. Все эти три случая изображены на фиг. 34, 35 и 36.

49. Ускореніе точки. Стрѣлка. Геометрическая производная по времени отъ скорости точки называется ускореніемъ. Мы будемъ означать ускореніе \ddot{r} . Координатами этого вектора по § 31 будутъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} x) = \frac{d}{dt} v \cos(v x) = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$\dot{v} \cos(\dot{v} y) = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad \dot{v} \cos(\dot{v} z) = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (3).$$

Относительно радіуса вектора движущейся точки ускореніе является геометрическою производною второго порядка, какъ и называютъ это формулы (3). Направленіе ускоренія параллельно касательной въ соответственной точкѣ къ годографу скорости и, если длину дуги годографа означимъ σ , то по своей величинѣ

$$\ddot{r} = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Ускореніе, какъ производная по времени отъ скорости, неоднородна со скоростью. Единицею ускоренія служитъ

$$\begin{aligned} & \text{сантиметръ} \\ & (\text{секун. ср. врем.})^2 \end{aligned}$$

Ускореніе по своему направленію можетъ совпадать (во все время движенія) со скоростью лишь тогда, когда годографъ пря-

мая, проходящая через начало, т. е. когда движение прямолинейное. Примемъ въ такомъ случаѣ траекторію за ось x -овъ и положимъ, что ускореніе равно единицѣ; тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$\frac{dx}{dt} = t,$$

если точка въ моментъ $t = 0$ была въ покоѣ. Интегрируя еще разъ, получимъ:

$$x = \frac{t^2}{2},$$

если точка въ моментъ $t = 0$ была въ началѣ координатъ. Уравненія, найденныя нами говорятъ, что въ прямолинейномъ движеніи съ постояннымъ ускореніемъ, равнымъ единицѣ, точка, выйдя изъ состоянія покоя, по истеченіи единицы времени пріобрѣтаетъ скорость единицу и пройдетъ путь въ половину единицы длины.

Направленіе ускоренія служитъ предѣломъ направленія приращенія скорости, т. е. хорды Δs годографа (фиг. 33); хорда эта лежитъ въ одной плоскости съ двумя смежными радіусами векторами годографа, параллельными двумъ смежнымъ касательнымъ траекторіи; поэтому въ предѣлѣ направленіе Δs , а слѣд. и направленіе ускоренія, параллельно плоскости кривизны траекторіи. Если же векторъ, изображающій ускореніе, построимъ изъ того положенія, которое занимаетъ движущаяся точка въ разсматриваемый моментъ, то векторъ этотъ будетъ лежать въ плоскости кривизны траекторіи.

Примѣры: а) Уравненія движенія точки:

$$x = at^2 + bt + c; \quad y = a_1t^2 + b_1t + c_1; \quad z = a_2t^2 + b_2t + c_2.$$

Проекціи ускоренія:

$$\ddot{x} \cos(\dot{v} x) = 2a; \quad \ddot{y} \cos(\dot{v} y) = 2a_1; \quad \ddot{z} \cos(\dot{v} z) = 2a_2,$$

Ускореніе постоянно по величинѣ и по направленію.

б) Уравненія движенія точки:

$$x = a \sin t \cos \beta t; \quad y = a \sin t \sin \beta t; \quad z = a \cos t.$$

Проекція ускоренія:

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos(\dot{r} \epsilon) &= -a\beta^2 \sin \lambda \cos \beta t; & \dot{r} \cos(\dot{r} \eta) &= -a\beta^2 \sin \lambda \sin \beta t; \\ & & \dot{r} \cos(\dot{r} \vartheta) &= 0. \end{aligned}$$

Ускореніе равно $a\beta^2 \sin \lambda$ и направлено по перпендикуляру, опущенному изъ движущейся точки на ось x -овъ.

Пусть точка m (x, y, z) описываетъ (фиг. 37) нѣкоторую криволинейную траекторію $m_0 m_1$, и вмѣстѣ съ нею пусть другая точка μ равномерно движется по касательной $m_0 \mu_1$ съ тою же скоростью v , которую имѣла m въ положеніи m_0 . Обѣ точки одновременно выходятъ изъ m_0 . По истеченіи безконечно малаго времени Δt точка m приходитъ въ положеніе m_1 на траекторіи, а μ въ положеніе μ_1 на касательной. Безконечно малый отръзокъ $\mu_1 m_1$ носитъ названіе стрѣлки. Опредѣлимъ его величину и направленіе.



Фиг. 37.

Координаты точки m_1 будутъ: $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$, гдѣ $\Delta x = x' \Delta t + \frac{1}{2} x'' \Delta t^2 + \dots$; $\Delta y = y' \Delta t + \frac{1}{2} y'' \Delta t^2 + \dots$; $\Delta z = z' \Delta t + \frac{1}{2} z'' \Delta t^2 + \dots$. Координатами точки μ_1 служатъ $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, гдѣ $\delta x = x' \Delta t$; $\delta y = y' \Delta t$; $\delta z = z' \Delta t$.

Проекція вектора $\mu_1 m_1$ на оси, очевидно, будутъ:

$$\mu_1 m_1 \cos(\mu_1 m_1, x) = \Delta x - \delta x = \frac{1}{2} x'' \Delta t^2;$$

$$\mu_1 m_1 \cos(\mu_1 m_1, y) = \Delta y - \delta y = \frac{1}{2} y'' \Delta t^2,$$

$$\mu_1 m_1 \cos(\mu_1 m_1, z) = \Delta z - \delta z = \frac{1}{2} z'' \Delta t^2;$$

Отсюда заключаемъ, что направленіе $\mu_1 m_1$ съ точностью до безконечно малыхъ второго порядка совпадаетъ съ направлениемъ ускоренія \ddot{v} , а по величинѣ

$$\mu_1 m_1 = \frac{1}{2} \ddot{v} \Delta t^2. \quad (4)$$

50. Проекция ускорения точки на неподвижное и подвижное направления. Пользуясь выводами § 33, для проекции ускорения на неподвижное направление Γ имеем выражение

$$\dot{r} \cos(\dot{v} U) = \frac{d}{dt} [r \cos(v U)],$$

а для подвижного направления U получаем формулу:

$$\dot{r} \cos(\dot{r} U) = \frac{d}{dt} [r \cos(v U)] - r \dot{v} \cos(v U), \quad (5)$$

где \dot{v} поворотная скорость (§ 42) направления U .

Примеры: Уравнения движения точки:

$$x = a \sin at \cos \beta t; \quad y = a \sin at \sin \beta t; \quad z = a \cos at.$$

Косинусы подвижного направления Γ сь осями координатъ

$$\lambda = \sin p \cos \beta t; \quad \mu = \sin p \sin \beta t; \quad \nu = \cos p;$$

p —некоторая постоянная.

Тогда

$$\dot{r} \cos(v \Gamma) = \frac{dx}{dt} \lambda + \frac{dy}{dt} \mu + \frac{dz}{dt} \nu = a^2 \sin^2 at - p.$$

$$r \dot{v} \cos(v U) = \frac{dx}{dt} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\mu}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\nu}{dt} = a^2 \sin p \sin at.$$

Откуда

$$\dot{v} \cos(\dot{r} U) = -a^2 \cos(at - p) - a^2 \sin p \sin at.$$

51. Ускорение тангенциальное и нормальное (центростремительное). Представимъ себе, что уравнения движения точки даны намъ въ специальномъ видѣ (8) § 40. Въ этомъ предположеніи составимъ выраженія для проекцій ускоренія на оси декартовыхъ координатъ. Дважды дифференцируя x , какъ функцию сложную отъ t , получимъ:

$$r \cos(\dot{v} x) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{d^2 s}{ds^2} \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Замѣтимъ, что $\frac{dx}{ds} = \cos(Tx)$, если черезъ T означимъ направление касательной къ траекторіи, и что по (38) § 32

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{\cos(\rho x)}{\rho}.$$

$$r \cos(\dot{v} x) = \frac{dx}{ds} \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{d^2 s}{ds^2} \frac{ds^2}{dt^2}$$

если ρ означает одновременно и величину и направление радиуса кривизны траектории. Поэтому, заменяя $\frac{d^2x}{dt^2}$ через v , и слѣд. $\frac{d^2y}{dt^2}$ через $\frac{dv}{dt}$, мы можемъ предыдущее равенство переписать такъ:

$$v \cos(\dot{v} x) = \frac{dv}{dt} \cos(Tx) + \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho x). \quad (6)$$

Сюда, конечно, присоединяются еще два:

$$v \cos(\dot{v} y) = \frac{dv}{dt} \cos(Ty) + \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho y);$$

$$v \cos(\dot{v} z) = \frac{dv}{dt} \cos(Tz) + \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho z). \quad (6')$$

Если умножимъ эти равенства соответственно на $\cos(Tx)$, $\cos(Ty)$, $\cos(Tz)$ и сложимъ, замѣтивъ, что $\cos(T\rho) = 0$, то получимъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} T) = \frac{dv}{dt}. \quad (7)$$

Подобнымъ образомъ, умножая на $\cos(\rho x)$, $\cos(\rho y)$, $\cos(\rho z)$, найдемъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} \rho) = \frac{v^2}{\rho}. \quad (8)$$

Наконецъ, если умножимъ на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$, гдѣ n направление бинормали, то получимъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} n) = 0, \quad (9)$$

ибо $\cos(Tn) = \cos(\rho n) = 0$.

Последнее равенство еще разъ подтверждаетъ, что ускорение лежитъ въ плоскости кривизны траектории; предыдущія же два даютъ значенія составляющихъ ускоренія точки по касательной (ускореніе тангенціальное) и по главной нормали къ траектории (ускореніе нормальное). Три равенства (6) могутъ быть замѣнены однимъ:

$$(\dot{v}) = \left(\frac{dv}{dt} \right) + \left(\frac{v^2}{\rho} \right),$$

если будем помнить, что направление $\frac{dv}{dt}$ идет по касательной, а $\frac{v}{\rho}$ по радиусу кривизны къ центру кривизны (§ 32).



Фиг. 38.

Тот же результат можно получить и геометрическим путем. Пусть (фиг. 38) векторы Oe и Oe' изображают скорости точки в моменты t и $t + \Delta t$. Опустим радиусом Oe из O бесконечно малую дугу ee' . Тогда изменение скорости ee' , можно рассматривать как геометрическую сумму векторов ee' и ee'' потому и после деления на Δt (§ 17).

$$\frac{ee'}{\Delta t} + \frac{ee''}{\Delta t} = \frac{ee''}{\Delta t}$$

Вектор ee'' , по построению, равен аналитическому приращению скорости \tilde{v} . Вектор $ee' = Oe' - Oe = v \cdot \Delta \alpha$, где α — угол между сошедшими скоростями или что то же, угол смежности траектории. Отношение

$$\frac{ee''}{\Delta t} = v \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v \Delta s}{\Delta t^2}$$

если Δs означает приращение длины дуги траектории, соответствующее Δt .

Обращаясь къ предѣлу, находимъ:

$$\text{Прел. } \frac{ee'}{\Delta t} = \tilde{v};$$

$$\text{Прел. } \frac{ee''}{\Delta t} = \text{Прел. } \frac{v \Delta s}{\Delta t^2} = \frac{dv}{dt} \frac{ds}{dt}$$

$$\text{Прел. } \left(\frac{v \Delta s}{\Delta t^2} \right) = \tilde{v} \cdot \text{Прел. } \left(\frac{s}{\Delta s} \right) \cdot \text{Прел. } \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho}$$

такъ какъ по опредѣленію, $\text{Прел. } \left(\frac{s}{\Delta s} \right) = \frac{1}{\rho}$.

Искомыя составляющія ускоренія найдены, если еще замѣтимъ, что предѣльное направление ee' , совпадаетъ съ v , т. е. съ касательной, а направление ee'' лежитъ въ одной плоскости съ двумя смежными касательными перпендикулярно къ v и идетъ въ ту сторону, въ которую поворачивается касательная, т. е. къ центру кривизны.

Тангенциальное ускорение влияет лишь на величину скорости, а нормальное изменяет направление скорости. Если движение равномерное, то нет тангенциального ускорения; если движение прямолинейное, то нормальное обращается в нуль, и только для равномерного прямолинейного движения оба ускорения равны нулю.

Иногда нормальное ускорение по его направлению называют центробежным.

52. Проекция ускорения точки на оси криволинейных координат. Пользуясь обозначениями § 43, составим выражения для проекций ускорения точки на оси криволинейных координат 1, 2, 3. Мы имеем:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} \ 1) = \frac{d^2x}{dt^2} \alpha_1 + \frac{d^2y}{dt^2} \beta_1 + \frac{d^2z}{dt^2} \gamma_1 + x'' \alpha_1 + y'' \beta_1 + z'' \gamma_1;$$

или, подставляя изъ (21) § 43:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} \ 1) = \frac{1}{A_1} \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right).$$

Выражение это можем переписать такъ:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v} \ 1) &= \frac{1}{A_1} \frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) - \\ &- \frac{1}{A_1} \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_1} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right). \end{aligned}$$

Если же воспользуемся (17) § 43 то найдемъ:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v} \ 1) &= \frac{1}{A_1} \frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_1'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_1'} \right) - \\ &- \frac{1}{A_1} \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x'}{\partial q_1'} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y'}{\partial q_1'} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z'}{\partial q_1'} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Продифференцируемъ по времени производную $\frac{\partial x}{\partial q_1}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_2' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_3} q_3'.$$

Съ другой стороны, если отъ (16) § 43 возьмемъ частную производную по q_1 , то получимъ

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_1} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_1} q_1'.$$

Отсюда выводимъ, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q_1}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ вообще

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial x'}{\partial q_i}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial y'}{\partial q_i}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial z'}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Обратимъ свое вниманіе на то, что любое изъ этихъ равенствъ, напръ первое, можно написать такъ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} x = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} x.$$

отсюда выводимъ для полученныхъ формулъ такое мнемоническое правило: символы $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial q_i}$ перестановимы.

Подставляя изъ (11) въ (10) и вводя снова обозначеніе h изъ (15) § 43, находимъ

$$(12) \quad \dot{r} \cos(\dot{r} - 1) = \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_1'} - \frac{\partial h}{\partial q_1} \right\}.$$

Отсюда присоединяются еще два выраженія для другихъ осей:

$$\dot{r} \cos(\dot{v} - 2) = \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_2'} - \frac{\partial h}{\partial q_2} \right\};$$

$$(12') \quad \dot{r} \cos(\dot{v} - 3) = \frac{1}{A_3} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial q_3'} - \frac{\partial h}{\partial q_3} \right\}.$$

Относительно полученныхъ формулъ мы можемъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: изъ нихъ оказывается, что при замѣнѣ въ выраженія для ускоренія декартовыхъ координатъ криволинейными можно ограничиться преобразованиемъ въ новымъ перемѣннымъ

одного только дифференциального выражения первого порядка h , тогда как непосредственный переход от одних формул для ускорения къ другимъ требовалъ бы преобразования дифференциальныхъ выражений второго порядка.

Для сферическихъ координатъ формулы (12) при прежнихъ обозначеніяхъ дають:

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos(\dot{r} \alpha) &= \dot{\rho}^2 - \rho \dot{\rho}^2 - \rho \sin^2 \varphi \dot{\psi}^2; \\ \dot{r} \cos(\dot{r} \beta) &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}') - \dot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi \dot{\psi}^2, \\ \dot{r} \cos(\dot{r} \gamma) &= \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{d}{dt} (\rho^2 \sin^2 \varphi \dot{\psi}'). \end{aligned} \quad (13)$$

Для цилиндрическихъ координатъ найдемъ:

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos(\dot{r} \delta) &= \dot{z}^2; \\ \dot{r} \cos(\dot{r} \mu) &= r'' - r \dot{\theta}^2; \\ \dot{r} \cos(\dot{r} \nu) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}'). \end{aligned} \quad (14)$$

53. Геометрическая производная отъ скорости, какъ отъ приложеннаго вектора. До сихъ поръ мы принимали скорость за простой векторъ; ставемъ теперь разсматривать ее какъ векторъ приложенный, полагая, что точка приложения служитъ сама движущаяся точка. Тогда координатами такого вектора будутъ величины:

$$x', y', z', x, y, z;$$

или, если возьмемъ другую систему координатъ § 13

$$x', y', z', x'y - y'x, x'z - z'x, y'x - x'y.$$

Опредѣлимъ теперь, какой приложенный векторъ будетъ представлять собой геометрическую производную (§ 35) отъ этого приложеннаго вектора. Координаты X, Y, Z, I, M, N искомой производной будутъ

$$X = \frac{dx'}{dt} = x'', \quad Y = y'', \quad Z = z'';$$

$$I = \frac{d}{dt} (z'y - y'z) = z''y - y''z, \quad M = r'z - z'r, \quad N = y'x - r'y.$$

Очевидно, по другой системе, тот же вектор можно выразить координатами:

$$x'', y'', x', y', z.$$

Отсюда выведем такое положение геометрической производной от вектора скорости, приложенного к движущейся точке, служить вектору ускорения, приложенный к той же точке.

54. Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера. Въ видѣ приложения выше полученныхъ результатовъ рѣшимъ слѣдующую задачу: точка описываетъ коническое сѣченіе съ постоянною секторіальною скоростью вокругъ фокуса этого сѣченія; определить величину и направленіе ускоренія.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 48, условия задачи выражаются равенствами

$$(15) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}; \quad r^2 \psi' = A.$$

Замѣтимъ, что во (4) § 39 уравненію траекторіи можемъ дать видъ

$$(16) \quad r + ex = p.$$

Изъ (3) того же § 39 имѣемъ такую зависимость между декартовыми и полярными координатами:

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Поэтому

$$r^2 \psi' = xy' - yx'$$

Дифференцируя по времени, найдемъ

$$r^2 \psi'' - yx'' = 0,$$

или

$$\frac{y''}{y} = \frac{x''}{x}.$$

Отсюда выводимъ, что ускореніе ϵ параллельно r , т. е. направленіе его, какъ приложеннаго вектора, проходитъ черезъ начало координатъ.

Означимъ величину ускоренія черезъ R , тогда можемъ написать

$$\epsilon'' = R \frac{x}{r}; \quad \psi'' = R \frac{y}{r}$$

Точнѣ говоря, мы означили черезъ R проекцію ускоренія на ось x полярныхъ координатъ (§ 39). Знакъ R укажетъ намъ направленіе ускоренія; при $R > 0$, ϵ пойдетъ отъ фокуса, при $R < 0$, ϵ будетъ направлено къ фокусу.

Дифференцируя уравнение (16), находимъ

$$r'' = -er' = -eR \frac{x}{r}. \quad (17)$$

Съ другой стороны по (14) § 52:

$$R = r'' - r\dot{\theta}^2.$$

Подставляя сюда изъ (16) и (17), получимъ

$$R(r + er) = -\frac{A^2}{r^3},$$

или по (16),

$$R = -\frac{A^2}{r} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Такимъ образомъ оказывается, что ускореніе направлено къ фокусу и обратно пропорціонально квадрату расстоянія.

55. Ускореніе точки второго и высшихъ порядковъ. Составляя геометрическую производную отъ ускоренія точки по времени, мы получимъ векторъ, r , называемый ускореніемъ второго порядка. Координаты его по § 31 будутъ

$$r \cos(rx) = \frac{d^2x}{dt^2} = x'''; \quad r \cos(ry) = y'''; \quad r \cos(rz) = z'''.$$

Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ составить выраженія для координатъ ускоренія любого n -таго порядка: r ; эти координаты будутъ

$$r \cos(rx) = \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} = x^{(n+1)}; \quad r \cos(ry) = y^{(n+1)}; \quad r \cos(rz) = z^{(n+1)}.$$

Подробнѣе разсматривать свойства этихъ векторовъ мы не будемъ

КИНЕМАТИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА.

ГЛАВА III.

Координаты твердаго тѣла. Конечныя уравненія движенія.

56. Твердое тѣло Движеніе прямое и обращенное. Твердымъ тѣломъ въ кинематическомъ смыслѣ или неизмѣняемою системою точекъ, какъ мы уже видѣли (§ 34), называется трехмѣрная неизмѣнная среда, элементомъ коей служить точка.

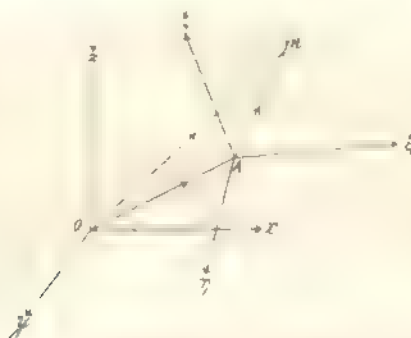
Подъ движеніемъ твердаго тѣла въ данной средѣ разумѣется послѣдовательное совпаденіе точекъ тѣла съ различными точками среды. Движеніе твердаго тѣла намъ извѣстно, если мы въ состояніи опредѣлить движеніе любой его точки. Термины „твердое тѣло“ въ кинематическомъ смыслѣ и „неизмѣняемая среда“—синонимы, поэтому вмѣсто словъ: движеніе твердаго тѣла въ данной средѣ, можно сказать: движеніе одной неизмѣняемой среды въ другой.

Если движущаяся среда конечныхъ размѣровъ и слѣд ограничена нѣкоторою поверхностью, то мы все-таки будемъ предпо- лагать, что эта среда можетъ быть продолжена и за свои грани- цы, такъ что въ любомъ мѣстѣ мы можемъ найти точку, принад- лежащую взятому твердому тѣлу. И такъ, пусть среда A движется въ средѣ B , т. е. точки a среды A совпадаютъ послѣдовательно съ различными точками b среды B . Но тогда съ другой стороны и точки b среды B переходятъ изъ однихъ точекъ a въ другія, т. е. среда B движется въ средѣ A . Такимъ образомъ, движеніе неизмѣняемой среды носитъ всегда двойственный характеръ; когда одна среда движется въ другой, то и наоборотъ другая дви- жется въ первой. Эти два движенія, вообще говоря, различны между собою, и одно изъ нихъ называется прямымъ, а другое обращеннымъ. Какое изъ двухъ движеній считать прямымъ,

какое обращеннымъ, зависитъ вполнѣ отъ нашего условія. Такъ, станемъ разсматривать двѣ неизмѣняемыхъ среды, частями которыхъ служить съ одной стороны объемъ луны, а съ другой объемъ земли; тогда, если движеніе лунной среды въ средѣ неизмѣнно связанной съ землею, примемъ за прямое, то обращеннымъ движеніемъ, неизбѣжно сопровождающимъ первое, будетъ движеніе земной среды въ лунной.

57. Координаты твердаго тѣла. Эйлеровы углы. Прежде всего займемся координатами твердаго тѣла, т. е. величинами, определяющими положеніе одной неизмѣняемой среды въ другой.

Фиг. 39.



Вообразимъ (фиг. 39) въ данной движущейся средѣ Σ систему прямоугольныхъ декартовыхъ координатныхъ плоскостей $A\xi\eta\zeta$, неизмѣнно съ этимъ движущимся тѣломъ связанную, т. е. такую, что разстоянія всякой точки этихъ плоскостей отъ любой точки тѣла не измѣняются съ теченіемъ времени. Тогда точки твердаго тѣла будутъ отличаться одна отъ другой своими координатами ξ, η, ζ по отношенію ко взятой системѣ; при томъ координаты эти постоянны во времени. Далѣе, точки той среды S , въ которой происходитъ движеніе, отнесемъ также къ системѣ декартовыхъ координатъ Oxy , неизмѣнно связанной съ этою средою S . Положеніе твердаго тѣла Σ въ средѣ S намъ будетъ извѣстно, если мы сможемъ указать положеніе любой точки его μ (ξ, η, ζ) или (§ 39) ту точку m (x, y, z) среды S , съ которою точка μ совпадаетъ.

Другими словами, надо найти зависимость между координатами ξ, η, ζ и x, y, z одной и той же точки по отношенію къ двумъ различнымъ системамъ осей. Въ аналитической геометріи такая задача рѣшается съ помощью слѣдующихъ формулъ преобразованія, служащихъ для перехода отъ системы $A\xi\eta\zeta$ къ новой системѣ $Oxyz$:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x_A + \xi \lambda_x + \eta \mu_x + \zeta \nu_x; \\ y &= y_A + \xi \lambda_y + \eta \mu_y + \zeta \nu_y; \\ z &= z_A + \xi \lambda_z + \eta \mu_z + \zeta \nu_z; \end{aligned}$$

Здѣсь x_A, y_A, z_A координаты относительно $Oxyz$ начала A осей $A\xi\eta\zeta$, а λ_x, \dots, ν_z косинусы угловъ однихъ осей съ другими по нижеслѣдующей схемѣ

	ξ	η	ζ
x	λ_x	μ_x	ν_x
y	λ_y	μ_y	ν_y
z	λ_z	μ_z	ν_z

Систему $A\xi\eta\zeta$ принято называть для краткости подвижною или относительною, а систему $Oxyz$ неподвижною или абсолютною; точно также среду, соединенную съ осями $A\xi\eta\zeta$, называютъ подвижною, а среду съ осями $Oxyz$ неподвижною.

Три равенства (1) могутъ быть выведены непосредственно изъ того соображенія, что (фиг. 39) радиусъ векторъ (Om) или (Op) представляетъ собою геометрическую сумму векторовъ (OA) и (Am) . Возьмемъ проекціи на Ox ; тогда

$$(Om \cos(Om, x)) = OA \cos(OA, x) + Am \cos(Am, x).$$

Но

$$(Om \cos(Om, x)) = x; \quad OA \cos(OA, x) = x_A,$$

$$\begin{aligned} Am \cos(Am, x) &= Am \cos(Am, \xi) \lambda_x + Am \cos(Am, \eta) \mu_x + \\ &+ Am \cos(Am, \zeta) \nu_x = \xi \lambda_x + \eta \mu_x + \zeta \nu_x. \end{aligned}$$

Подставляя, и получимъ первую формулу изъ (1). Взявши проекціи на другія оси, найдемъ и остальные.

Вслѣдствіе ортогональности обѣихъ системъ координатъ между косинусами λ_x, \dots, ν_z существуютъ шесть такихъ зависимостей:

$$\begin{aligned} \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 &= 1; & \mu_x \nu_x + \mu_y \nu_y + \mu_z \nu_z &= 0; \\ \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 &= 1; & \nu_x \lambda_x + \nu_y \lambda_y + \nu_z \lambda_z &= 0; \\ \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2 &= 1; & \lambda_x \mu_x + \lambda_y \mu_y + \lambda_z \mu_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти равенства могутъ быть замѣнены другими шестью, имъ равносильными:

$$\begin{aligned} \lambda_x^2 + \mu_x^2 + \nu_x^2 &= 1; & \lambda_x \lambda_x + \mu_x \mu_x + \nu_x \nu_x &= 0; \\ \lambda_y^2 + \mu_y^2 + \nu_y^2 &= 1; & \lambda_y \lambda_y + \mu_y \mu_y + \nu_y \nu_y &= 0; \\ \lambda_z^2 + \mu_z^2 + \nu_z^2 &= 1; & \lambda_z \lambda_z + \mu_z \mu_z + \nu_z \nu_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Векторъ Am (фиг. 39) можемъ разсматривать какъ геометрическую разность радиусовъ векторовъ Om и OA . Взявши проекции на ось $A\xi A'$, найдемъ формулы, обратныя (1)

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_A) \lambda_x + (y - y_A) \lambda_y + (z - z_A) \lambda_z, \\ \eta &= (x - x_A) \mu_x + (y - y_A) \mu_y + (z - z_A) \mu_z; \\ \zeta &= (x - x_A) \nu_x + (y - y_A) \nu_y + (z - z_A) \nu_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Выраженія 1) показываютъ, что положеніе твердаго тѣла опредѣляется двѣнадцатью величинами, тремя координатами x_A, y_A, z_A и девятью косинусами. Но между этими косинусами существуютъ шесть зависимостей (2) или (3), слѣд. независимыхъ координатъ твердаго тѣла всего шесть. За такія координаты можемъ принять x_A, y_A, z_A и любые три косинуса, только не входящіе одновременно въ какое либо изъ первыхъ отношеній (2) или (3).

Возьмемъ послѣднія два изъ выраженій (2):

$$\begin{aligned} \lambda_x \mu_x + \lambda_y \mu_y + \lambda_z \mu_z &= 0; \\ \lambda_x \nu_x + \lambda_y \nu_y + \lambda_z \nu_z &= 0; \end{aligned}$$

и исключимъ изъ нихъ сначала λ_x , потомъ λ_y ; тогда придемъ къ равенству такихъ отношеній:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_x}{\mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y} &= \frac{\lambda_y}{\mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x} = \frac{\lambda_z}{\mu_x \nu_z - \mu_z \nu_x} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}}{1 \cdot (\mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y)^2 + (\mu_x \nu_y - \mu_y \nu_x)^2 + (\mu_x \nu_z - \mu_z \nu_x)^2}. \end{aligned}$$

Но по известному соотношенію Эйлера:

$$(\mu_x v_x - \mu_y v_y)^2 + (\mu_x v_y - \mu_y v_x)^2 + (\mu_x v_z - \mu_y v_z)^2 = \\ = (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - (\mu_x v_x + \mu_y v_y + \mu_z v_z)^2.$$

слѣд. по (2) находимъ

$$\frac{\lambda_x}{\mu_x v_x - \mu_y v_y} = \frac{\lambda_y}{\mu_x v_y - \mu_y v_x} = \frac{\lambda_z}{\mu_x v_z - \mu_y v_z} = 1.$$

Замѣтимъ, что мы всегда будемъ предполагать подвижную и неподвижную системы осей соответственными и, т. е. такими, что при совпадении $A\xi$ съ $O\xi$, $A\eta$ съ $O\eta$ и оси $A\xi$ и $O\xi$ совпадаютъ своими положительными направленіями. Въ такомъ случаѣ возможны слѣдующія значенія косинусовъ: $\lambda_x = \mu_x = v_x = 1$; $\lambda_y = \mu_y = v_y = 0$, и слѣд. изъ двухъ знаковъ при единицѣ мы должны выбрать плюсъ. Такимъ и подобнымъ образомъ приходимъ къ равенствамъ, которыми намъ придется впоследствии пользоваться:

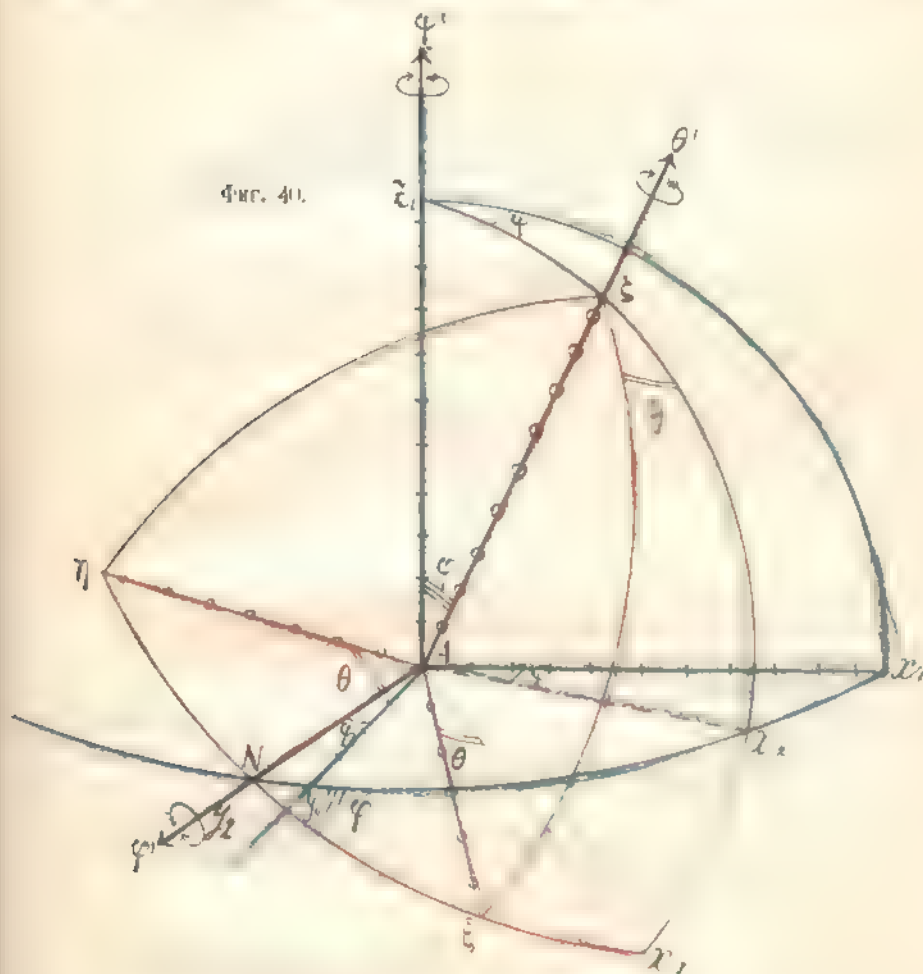
$$\lambda_x = \mu_x v_x - \mu_y v_y, \quad \lambda_y = \mu_x v_y - \mu_y v_x, \quad \lambda_z = \mu_x v_z - \mu_y v_z, \\ (5) \quad \mu_x = v_x \lambda_x - v_y \lambda_y, \quad \mu_y = v_x \lambda_y - v_y \lambda_x, \quad \mu_z = v_x \lambda_z - v_y \lambda_z, \\ v_x = \lambda_x \mu_x - \lambda_y \mu_y, \quad v_y = \lambda_x \mu_y - \lambda_y \mu_x, \quad v_z = \lambda_x \mu_z - \lambda_y \mu_z.$$

Типичнымъ изъ этихъ выраженій можно считать первое $\lambda_x = \mu_x v_x - \mu_y v_y$; всѣ остальные получаются съ помощью круговой подстановки буквъ λ , μ , v и значковъ x , y , z .

Вмѣсто трехъ изъ косинусовъ λ, \dots, v , за независимыя координаты твердаго тѣла обыкновенно берутъ три угла, называющіеся углами Эйлера. Построимъ (фиг. 40) изъ начала A подвижныхъ осей систему Ax_1, y_1, z_1 , параллельную неподвижной Ox, y, z . Тогда, очевидно, положеніе осей ξ, η, ζ относительно x_1, y_1, z_1 опредѣляется съ помощью угловъ φ , θ и ψ : ψ — двугранный уголъ между плоскостями x_1, z_1 и ξ, ζ ; θ — уголъ между осями Az_1 и $A\xi$; θ — двугранный уголъ между плоскостями x_1, ξ и η, ζ . Уголъ ψ считается вкругъ оси Az_1 , уголъ θ — вкругъ оси $A\xi$, перпендикулярной къ плоскости x_1, ξ ; уголъ θ — вкругъ оси $A\xi$. Направленіе, въ которомъ углы возрастаютъ, указано на чертежѣ стрѣлкой. Общее правило для опредѣленія этого направленія такое: пусть наблюдатель сидитъ по соответственной оси, причѣмъ ось идетъ отъ ногъ къ головѣ, тогда для него, при увеличеніи угла.

соответственная плоскость или прямая кажутся перемещающимися по часовой стрелке. Уголь ψ называют иногда прецессионным углом, а уголь φ нутаціоннымъ.

Фиг. 40.



Зависимость косинусовъ λ, \dots, ν отъ новыхъ координатъ можно установить слѣдующимъ образомъ. Повернемъ ось x_1, y_1 около Az_1 въ положительномъ направленіи на уголь ψ ; тогда приведемъ систему въ положеніе x_1, y_1, z_1 . При этомъ, очевидно, Ay_1 совпадетъ съ Ax_1 , а Az_1 ляжетъ въ плоскость x_1, y_1 . Тогда повертываемъ ось x_1, y_1, z_1 около Ay_1 на уголь φ въ положительномъ направленіи; система придетъ въ положеніе x_2, y_2, z_2 , и ось Ax_2 совпа-

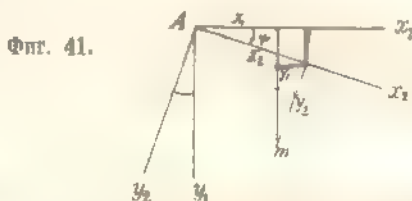
доть съ плоскостью $\xi\eta$. Наконецъ поворотъ около A_1 на уголъ θ въ положительномъ направленіи совмѣститъ оси $\xi x_3 y$ съ осями $\xi\xi\zeta$.

Пусть координаты какой либо точки относительно

системы	$Oxyz$	будутъ	x, y, z ;
—	$Ax_1y_1z_1$	—	x_1, y_1, z_1 ;
	$Ax_2y_2z_2$	—	x_2, y_2, z_2 ;
	$Ax_3y_3z_3$		x_3, y_3, z_3 ;
	$A\xi\eta\zeta$		ξ, η, ζ .

Тогда между координатами x, y, z и x_1, y_1, z_1 имѣемъ зависимость:

$$(6) \quad x = x_A + x_1; \quad y = y_A + y_1; \quad z = z_A + z_1.$$



Для перехода отъ x_1, y_1, z_1 къ x_2, y_2, z_2 мы должны повернуть систему осей около Az_1 на уголъ ψ ; слѣд. координата z не измѣнится:

$$z_1 = z_2;$$

а изъ фиг. 41 ясно, что

$$x_1 = x_2 \cos \psi - y_2 \sin \psi;$$

$$y_1 = x_2 \sin \psi + y_2 \cos \psi.$$

Подобнымъ образомъ

$$x_2 = x_3 \cos \varphi + z_3 \sin \varphi;$$

$$y_2 = y_3.$$

$$z_2 = -x_3 \sin \varphi + z_3 \cos \varphi;$$

и наконецъ

$$x_2 = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta;$$

$$y_2 = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta;$$

$$z_2 = \zeta;$$

Эти выражения подставимъ послѣдовательно во все предыдущія до (6) и полученные результаты сравнимъ съ (1). Тогда придемъ къ такимъ формуламъ для косинусовъ:

$$\lambda_x = -\sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi;$$

$$\lambda_y = \sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \cos \varphi;$$

$$\lambda_z = -\sin \varphi \cos \theta;$$

$$\mu_x = -\cos \theta \sin \psi - \sin \theta \cos \psi \cos \varphi;$$

$$\mu_y = \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \cos \varphi; \quad (7)$$

$$\mu_z = \sin \varphi \sin \theta;$$

$$\nu_x = \sin \varphi \cos \psi;$$

$$\nu_y = \sin \varphi \sin \psi;$$

$$\nu_z = \cos \varphi$$

Замѣтимъ, что наиболѣе просто выражаются косинусы, содержащіе букву ν или значекъ ε .

Предыдущія выражения можно получить и непосредственно съ помощью формулы сферической тригонометріи $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, гдѣ a, b, c стороны, а A, B, C противоположные углы сферическаго треугольника, если обратимъ вниманіе на то, что плоскости $\xi\eta$ и x_1y_1 наклонены другъ къ другу подъ угломъ φ , а прямая AN образуетъ углы: θ съ Ax_1 и ψ съ Ay_1 .

58. Движеніе поступательное. Если твердое тѣло движется, то хотя одна изъ шести координатъ его:

$$x_A, y_A, z_A, \psi, \varphi, \theta$$

измѣняется съ теченіемъ времени. Тогда равенства (1) служатъ, при ξ, η, ζ постоянныхъ, уравненіями прямого движенія, т. е. движенія любой точки (ξ, η, ζ) въ средѣ S ; равенства же (4) при x, y, z постоянныхъ, будутъ уравненіями движенія обращеннаго, т. е. движенія любой точки (x, y, z) въ средѣ Σ .

Разсмотримъ сначала тотъ случай движенія твердаго тѣла, когда три Эйлеровыхъ угла не измѣняются; пусть

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t);$$

$$\varphi = \text{const.}; \quad \psi = \text{const.}; \quad \theta = \text{const.};$$

Изъ (1) видно, что тогда уравненія движенія любой точки m тѣла будутъ:

$$x = f_1(t) + C_1; \quad y = f_2(t) + C_2; \quad z = f_3(t) + C_3;$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 постоянныя. Для другой точки m_1 тѣла мы имѣли бы

$$x_1 = f_1(t) + C'_1; \quad y_1 = f_2(t) + C'_2; \quad z_1 = f_3(t) + C'_3;$$

гдѣ C'_1, C'_2, C'_3 постоянныя, всё, вообще говоря, отличныя отъ прежнихъ.

Вычитая соответственно полученныя уравненія, найдемъ:

$$x_1 - x = C'_1 - C_1; \quad y_1 - y = C'_2 - C_2; \quad z_1 - z = C'_3 - C_3,$$

т. е. прямая, соединяющая любыя двѣ точки тѣла m и m_1 , во время движенія остается параллельною своему первоначальному направленію.

Такого рода движеніе носитъ названіе поступательнаго

Траектории всѣхъ точекъ тѣла тождественны между собою, поэтому при изученіи поступательнаго движенія тѣла можно ограничиться разсмотрѣніемъ движенія одной какой либо точки его.

Направление осей $A\xi\eta\zeta$ въ тѣлѣ выберемъ такъ, чтобы

$$\varphi = \psi = \theta = 0;$$

тогда $\lambda_x = \mu_y = \nu_z = 1$, а прочіе косинусы нули. Въ такомъ случаѣ равенства (4) намъ дадутъ, при $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ постоянныхъ

$$\xi = -f_1(t) + \Gamma_1; \quad \eta = -f_2(t) + \Gamma_2; \quad \zeta = -f_3(t) + \Gamma_3.$$

Ясно, что обращенное движеніе также поступательное. Траекторіи обращеннаго движенія тождественны съ траекторіями прямого, только описываются движущимися точками въ противоположномъ направленіи.

59. Вращеніе тѣла около неподвижной точки. Движеніе параллельно плоскости. Положимъ теперь, что

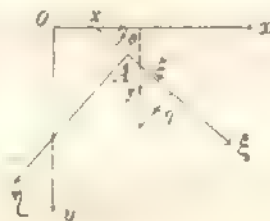
$$x_A = \text{const.}; \quad y_A = \text{const.}; \quad z_A = \text{const.}$$

$$\varphi = \alpha(t), \quad \psi = \beta(t), \quad \theta = \gamma(t).$$

Тогда точка A остается въ покоѣ, и движеніе такого рода называется вращеніемъ тѣла Σ около неподвижной точки или неподвижнаго полюса A . Очевидно, обращенное движеніе будетъ также вращеніемъ тѣла Σ около неподвижной точки A .

Изъ точки A какъ центра произвольнымъ радиусомъ въ обѣихъ сферахъ построимъ по сферѣ; сферу въ Σ назовемъ σ , а сферу въ Λ назовемъ s . Ясно, что въ разсматриваемомъ случаѣ сфера σ будетъ двигаться по сферѣ s . Траекторія любой точки m тѣла кривая сферическая. Если прямая, соединяющая A съ разсматриваемою точкою m , встрѣчаетъ сферу σ въ точкѣ μ , то траекторія m подобна траекторіи точки μ ; причеиъ центромъ подобія служитъ точка A , а модулемъ подобія—отношеніе $\frac{Am}{A\mu}$. Поэтому при разсмотрѣннн вращенія твердаго тѣла мы можемъ ограничиться изученіемъ движенія сферы σ по сферѣ s или, какъ говорятъ, движенія сферической фигуры по сферѣ.

Фиг. 42



Когда неподвижная точка A уходитъ на безконечность, тогда семейство концентрическихъ сферъ σ , а также и s , обращается въ семейство параллельныхъ плоскостей, и мы имѣемъ такъ называемое движеніе тѣла параллельно плоскости. Въ этомъ случаѣ движенія точекъ, лежащихъ на перпендикулярѣ къ семейству параллельныхъ плоскостей, тождественны между собою. Всѣ траекторіи лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, и можно ограничиться разсмотрѣннмъ движенія одной какой либо подвижной плоскости по соответственной неподвижной. Поэтому иначе такое движеніе называется движеніемъ плоской фигуры въ ея плоскости. Очевидно, обращенное движеніе обладаетъ тѣми же свойствами.

Уравнения движения тѣла примутъ для разсматриваемаго случая видъ, отличный отъ уравнений вращательнаго движения. Пусть за плоскость xOy взята нами одна изъ плоскостей, параллельно которымъ происходитъ движение. Соответствующую подвижную плоскость примемъ за $A\xi\eta$. Тогда $A\xi$ и Oz будутъ всегда параллельны. Положеніе осей $A\xi\eta$ въ плоскости xOy вполне опредѣлится координатами x_1, y_1 начала и угломъ θ оси $A\xi$ съ Ox (фиг. 42). Координаты x, y съ ξ, η связаны такими уравненіями:

$$x = x_1 + \xi \cos \theta - \eta \sin \theta;$$

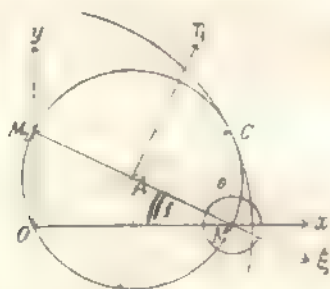
$$y = y_1 + \xi \sin \theta + \eta \cos \theta.$$

Движеніе фигуры вполне опредѣлено, если намъ даны

$$x_1 = f_1(t); \quad y_1 = f_2(t); \quad \theta = f_3(t).$$

Тогда предыдущія уравненія представляютъ собою уравненія движения любой точки фигуры; а чтобы получить уравненія движения какой либо точки тѣла, лежащей внѣ плоскости xOy , надо къ предыдущимъ уравненіямъ прибавить слѣдующее:

$$z = z_1.$$



Фиг. 42

60. Кардановское движеніе прямое и обращенное. Въ видѣ примѣра разсмотримъ такое движеніе плоской фигуры, когда двѣ точки ея перемѣщаются по двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ. Примемъ эти прямыя за Ox и Oy (фиг. 43). Пусть точка $M_1(x, y_1)$ движется по Ox , а точка $M_2(x_2, y_2)$ по Oy . Немѣнное разстояніе между точками M_1 и M_2 назовемъ $2R$; удаленіе точки M отъ начала координатъ не можетъ превышать $2R$; слѣд. мы можемъ положить

$$x_1 = 2R \cos t; \quad y_1 = 0;$$

где $f = f(t)$ — произвольная функция времени. Так как

$$x_1^2 + y_1^2 = 4R^2,$$

то за уравнения движения точки M_1 беремъ

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 2R \sin f.$$

За начало O подвижных осей выбираемъ серед ну отъ каза $M_1 M_2$, въ такомъ случаѣ

$$x_A = R \cos f; \quad y_A = R \sin f.$$

Если $A\xi$ направимъ по AM_1 , то

$$\theta = 2\pi - \angle M_1 M_2 O = 2\pi - \operatorname{arctg}(tg f) = 2\pi - f.$$

Уравнения (8) примутъ тогда видъ:

$$x = (R + \xi) \cos f + \eta \sin f;$$

$$y = (R - \xi) \sin f + \eta \cos f;$$

Если исключимъ f , то надемъ уравненіе траекторіи:

$$[\eta x + x(\xi - R)]^2 + [\eta y - y(\xi - R)]^2 = \xi^2 + \eta^2 - R^2.$$

Это кривая второго порядка:

$$x^2 \{(\xi - R)^2 + \eta^2\} - 4R\eta xy + y^2 \{(\xi + R)^2 + \eta^2\} = \xi^2 + \eta^2 - R^2. \quad (9)$$

Изъ очевиднаго равенства:

$$4R^2 \xi^2 - \eta^2 - (\xi - R)^2 - \eta^2 + (\xi + R)^2 = (\xi + \eta)^2 - R^2,$$

заключаемъ, что траекторіей служатъ эллипсы. Для точекъ, лежащихъ на кругу:

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2,$$

проходящемъ чрезъ $M_1 M_2$, и O , эллипсъ превращается въ двѣ совпадающія прямыя:

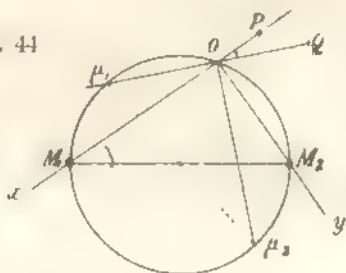
$$y(R + \xi) = \eta x.$$

Уравненіе (9) при ξ, η постоянныхъ даетъ траекторію прямого движенія; при x, y постоянныхъ оно становится уравненіемъ траекторіи движенія обращеннаго, получается кривая четвертаго порядка, называемая эллипсой Паскаля.

Мы убѣдимся, однако, не изъ уравненія (9), а изъ разсмотрѣнія геометрическихъ особенностей обращеннаго движенія, что дѣйствительно кривая (9) будетъ эллипсой Паскаля.

Въ обратномъ движеніи (фиг. 44) стороны прямого угла $\tau O\mu$ всегда проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки M_1 и M_2 . Вершина прямого угла O описываетъ окружность, диаметромъ коей служить M_1M_2 . Возьмемъ какую

Фиг. 44



либо точку P на сторонѣ угла. Пусть $M_1P = a$, $OP = r$, $\angle M_1M_2P = \alpha$. Легко очевидно, уравненіе траекторіи P будетъ:

$$\rho = a + M_1M_2 \cos \varphi = a + 2R \cos \varphi;$$

а это и есть уравненіе эпитки Паскаля. Возьмемъ теперь точку Q , лежащую где либо не на сторонахъ угла xOy ; проведемъ прямую $QO\mu$, и диаметр $\mu_1\mu_2$. Уголъ POQ постояненъ, слѣд и длины дугъ $M_1\mu_1$ и $M_2\mu_2$ постоянны, а потому точки μ_1 и μ_2 неподвижны. Такимъ образомъ мы вернулись къ уже рассмотрѣнному случаю точки P и слѣдъ убѣждаемся, что траекторія любой точки Q будетъ эпитка Паскаля.

Разсмотрѣнное нами прямое движеніе имѣетъ приложение въ приборѣ, называемомъ эллиптическимъ циркулемъ, а обратное послужило основною идеею аппарата Леонардо да Винчи для вычерчивания оваловъ.

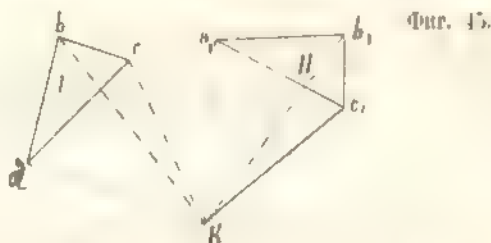
61. Центр и ось конечнаго вращенія. Разсмотримъ два положенія плоской фигуры въ ея плоскости I и II (фиг. 45). Предполагается, что фигура можетъ перейти изъ одного положенія въ другое, не выходя изъ плоскости. Отметимъ въ двухъ положеніяхъ соответственныя точки a, a_1, b, b_1, c, c_1 . Опредѣлимъ точку K , отстоящую на равныхъ разстояніяхъ отъ a и a_1, b и b_1, c и c_1 : $Ka = Ka_1, Kb = Kb_1$.

Тогда изъ равенства треугольниковъ легко убѣдиться, что

$$Kc = Kc_1, \text{ и } \angle aKa_1 = \angle bKb_1 = \angle cKc_1.$$

Теперь ясно, что, если фигуру I повернуть около K на уголъ $\angle aKa_1$, то она всѣми своими точками совпадетъ съ фигурою II. Точка K называется центромъ конечнаго вращенія. Центръ K уходитъ на безконечность лишь въ томъ случаѣ, когда aa_1 и bb_1 равны и параллельны; тогда фигура изъ положенія I въ положеніе II переводится поступательнымъ движеніемъ.

Изъ этихъ элементарныхъ соображеній вытекаетъ, что всякое движеніе плоской фигуры въ ея плоскости, за исключеніемъ поступательнаго, можно представить себѣ какъ сплошной рядъ поворотовъ на бесконечно малые углы вокругъ центровъ, соответствующихъ двумъ бесконечно близкимъ положеніямъ фигуры.



Фиг. 45.

Сказанное нами легко распространить и на случай движенія сферической фигуры по сферѣ. Повторимъ предыдущія построенія, замѣнивъ лишь прямыя линіи дугами большихъ круговъ. Тогда убѣдимся, что на сферѣ всегда существуютъ двѣ точки K_1 и K_2 , для которыхъ $K_1a = K_1a'$; $K_2a = K_2a'$; $K_1b = K_1b'$ и т. д. Эти двѣ точки лежатъ на концахъ діаметра сферы K_1K_2 . Кромѣ того сферической или двугранный уголъ aK_1K_2a' , bK_1K_2b' , cK_1K_2c' . Оставивъ точки K_1 и K_2 неподвижными, повернемъ сферу σ на общую величину двугранныхъ угловъ, тогда всѣ точки фигуры I совмѣстятся съ соответственными точками фигуры II, а слѣд. и тѣло изъ положенія I переведется въ положенія II поворотомъ на тотъ же уголъ около оси K_1K_2 . Ось эта называется осью конечнаго вращенія.

Отсюда выводимъ, что всякое вращеніе твердаго тѣла можно разсматривать, какъ сплошной рядъ поворотовъ на бесконечно малые углы около осей, соответствующихъ двумъ смежнымъ положеніямъ тѣла.

Къ вышеприведеннымъ заключеніямъ въслѣдствіи придемъ инымъ путемъ.

62. Общій случай движенія твердаго тѣла. Перейдемъ теперь къ общему случаю движенія твердаго тѣла, когда всѣ шесть координатъ мѣняются съ временемъ:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t), & y_A &= f_2(t); & z_A &= f_3(t); \\ \varphi &= f_4(t); & \psi &= f_5(t); & \theta &= f_6(t). \end{aligned}$$

Построимъ оси $Ax_1y_1z_1$, имѣющія съ подвижными общее начало A и параллельныя неподвижнымъ. Кромѣ средъ Σ и δ пред

ставим еще промежуточную среду Ξ , неизменно связанную съ этими осями. Координаты какой либо точки относительно подвижных осей означимъ x_1, y_1, z_1 . Тогда имѣемъ слѣдующія равенства—съ одной стороны:

$$x = x_1 + x_1', \quad y = y_1 + y_1'; \quad z = z_1 + z_1';$$

а съ другой стороны.

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi \lambda_x + \eta \mu_x + \zeta \nu_x; \\ (1) \quad y_1 &= \xi \lambda_y + \eta \mu_y + \zeta \nu_y; \\ z_1 &= \xi \lambda_z + \eta \mu_z + \zeta \nu_z. \end{aligned}$$

Мы видимъ, что среда Σ вращается въ средѣ Ξ около точки A , а среда Ξ движется въ средѣ S поступательно: всѣ точки ея перемѣщаются такъ, какъ полюсъ A . Такой способъ разсмотрѣнія движенія тѣла Σ называется разложеніемъ движенія. Здѣсь мы разложили движеніе Σ на поступательную часть—движеніе среды Ξ въ S и вращательную движеніе Σ въ Ξ .

Подобное разложеніе можетъ быть сдѣлано безчисленнымъ множествомъ способовъ: за полюсъ A можно взять любую точку тѣла Σ . Замѣтимъ, что отъ перемѣны полюса, вообще говоря, измѣнятся поступательная часть движенія, т. е. движеніе среды Ξ въ S ; но вращеніе Σ въ Ξ , характеризуемое функциями: $\varphi = f_1(t)$, $\psi = f_2(t)$; $\theta = f_3(t)$, отъ того, какая точка взята за полюсъ, отнюдь не зависитъ.

Въ этомъ можно убѣдиться и аналитически. Приложимъ уравненія (1) къ какой либо точкѣ B тѣла Σ , тогда

$$x_B = x_A + \xi_B \lambda_x + \eta_B \mu_x + \zeta_B \nu_x;$$

$$y_B = y_A + \xi_B \lambda_y + \eta_B \mu_y + \zeta_B \nu_y;$$

$$z_B = z_A + \xi_B \lambda_z + \eta_B \mu_z + \zeta_B \nu_z.$$

Вычтемъ эти равенства изъ (1):

$$x = x_B + (\xi - \xi_B) \lambda_x + (\eta - \eta_B) \mu_x + (\zeta - \zeta_B) \nu_x;$$

$$y = y_B + (\xi - \xi_B) \lambda_y + (\eta - \eta_B) \mu_y + (\zeta - \zeta_B) \nu_y;$$

$$z = z_B + (\xi - \xi_B) \lambda_z + (\eta - \eta_B) \mu_z + (\zeta - \zeta_B) \nu_z.$$

Введемъ новыя подвижныя оси $B\xi, \eta, \zeta$, параллельныя преж-

нимъ $A\xi\eta^c$; тогда

$$\xi_1 = \xi + \xi_n; \quad \eta_1 = \eta + \eta_n, \quad \zeta = \zeta + \zeta_n,$$

а слѣд. предыдущія уравненія даютъ

$$x = x_n + \xi_1 \lambda_x + \eta_1 (\mu_x + \zeta_1 \nu_x);$$

$$y = y_n + \xi_1 \lambda_y + \eta_1 (\mu_y + \zeta_1 \nu_y);$$

$$z = z_n + \xi_1 \lambda_z + \eta_1 (\mu_z + \zeta_1 \nu_z).$$

что по сравненію съ (1) и доказываетъ высказанное положеніе

ГЛАВА IV.

Скорости точек твердаго тѣла.

63. Скорости для движенія поступательнаго. Дифференцируя по времени уравненія движенія (1) § 57 въ томъ предположеніи, что тѣло движется поступательно, найдемъ

$$(1) \quad x' = x_A'; \quad y' = y_A'; \quad z' = z_A';$$

такъ какъ всѣ косинусы величины постоянныя. Отсюда заключаемъ, что въ движеніи поступательномъ скорости всѣхъ точекъ тѣла геометрически равны между собою и равны скорости полюса.

64. Скорости для движенія вращательнаго. Мгновенная угловая скорость. Мгновенная ось. Положимъ теперь, что тѣло вращается около неподвижнаго полюса A : въ такомъ случаѣ дифференцированныя выраженія (1) § 57 дасть:

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= \xi \lambda' - \eta \mu' + \zeta \nu'; \\ y' &= \xi \lambda' + \eta \mu' + \zeta \nu'; \\ z' &= \xi \lambda' + \eta \mu' + \zeta \nu'. \end{aligned}$$

Введемъ вмѣсто координатъ ξ, η, ζ координаты x, y, z съ помощью равенствъ (4) § 57; тогда найдемъ

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= L(x - x_A) + R_1(y - y_A) + Q(z - z_A); \\ y' &= R(x - x_A) + M(y - y_A) + P_1(z - z_A); \\ z' &= Q(x - x_A) + P(y - y_A) + N(z - z_A); \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
 - L &= \lambda_x \lambda'_x + \mu_x \mu'_x + \nu_x \nu'_x; = 0 \\
 - M &= \lambda_y \lambda'_y + \mu_y \mu'_y + \nu_y \nu'_y; = 0 \\
 - N &= \lambda_z \lambda'_z + \mu_z \mu'_z + \nu_z \nu'_z; = 0 \\
 + P &= \lambda_x \lambda'_z + \mu_x \mu'_z + \nu_x \nu'_z; \\
 P_1 &= \lambda_y \lambda'_z + \mu_y \mu'_z + \nu_y \nu'_z; \\
 + Q &= \lambda_x \lambda'_y + \mu_x \mu'_y + \nu_x \nu'_y; \\
 Q_1 &= \lambda_y \lambda'_y + \mu_y \mu'_y + \nu_y \nu'_y; \\
 - R &= \lambda_x \lambda'_x + \mu_x \mu'_x + \nu_x \nu'_x; \\
 R_1 &= \lambda_y \lambda'_x + \mu_y \mu'_x + \nu_y \nu'_x.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Если припомнимъ соотношенія (3) § 57, то, дифференцируя ихъ, убѣдимся, что

$$\begin{aligned}
 L=0; \quad M=0; \quad N=0; \\
 P + P_1 = 0; \quad Q + Q_1 = 0; \quad R + R_1 = 0.
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} P_1 = -P \\ Q_1 = -Q \\ R_1 = -R \end{array} \right\}$

Такимъ образомъ вмѣсто (2) получимъ окончательно такія формулы Эйлера:

$$\begin{aligned}
 z' - Q(z - z_A) - R(y - y_A) &= \begin{vmatrix} Q & R \\ y - y_A & z - z_A \end{vmatrix}; \\
 y' - R(x - x_A) - P(z - z_A) &= \begin{vmatrix} R & P \\ z - z_A & x - x_A \end{vmatrix}; \\
 x' - P(y - y_A) - Q(x - x_A) &= \begin{vmatrix} P & Q \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Если эти формулы перепишемъ въ видѣ:

$$x' = R(y_A - y) - Q(x_A - x);$$

$$y' = P(x_A - x) - R(y_A - y);$$

$$z' = Q(x_A - x) + P(y_A - y);$$

и сравнимъ тогда съ (17) § 11, то увидимъ, что скорость какой либо точки (x, y, z) тѣла представляетъ собою моментъ вектора съ координатами P, Q, R , приложеннаго къ точкѣ (x_A, y_A, z_A) вокругъ этой самой точки (x, y, z) .

Векторъ Ω , координатами котораго служатъ P, Q, R , по своимъ измѣреніямъ, какъ нетрудно видѣть изъ (4), сравнимъ съ

1

един. врем.

слѣд. однороденъ съ угловою скоростью (§ 47) Поэтому онъ называется мгновенною угловою скоростью. Значитъ „мгновенная“ отмѣчаетъ, что названный векторъ характеризуетъ распределеніе скоростей по точкамъ вращающагося твердаго тѣла лишь для одного взятаго момента. Для другого какого либо момента векторъ Ω , вообще говоря, измѣнится и по величинѣ, и по направленію.

Основаніемъ, приложеннаго вектора Ω служитъ прямая, проходящая черезъ неподвижный полюсъ A :

$$(6) \quad \frac{x - x_A}{P} = \frac{y - y_A}{Q} = \frac{z - z_A}{R}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ эта же прямая представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ тѣла, находящихся въ мгновенномъ покоѣ, поэтому она называется мгновенною осью (сравни § 61).

Скорости какой либо точки вращающагося тѣла, по выше сказанному, перпендикулярна къ плоскости, содержащей точку и мгновенную ось, а по величинѣ равна произведенію $\Omega \delta$, гдѣ δ кратчайшее разстояніе этой точки до оси, притомъ для наблюдателя, стоящаго вдоль оси и смотрящаго на точку, скорость кажется направленною слѣва направо (§ 8).

Если векторъ Ω разложимъ на нѣсколько составляющихъ, ему эквивалентныхъ, направа P, Q, R , приложенныхъ къ A , то скорость какой либо точки тѣла равняется (§§ 24 и 26) геометрической суммѣ глѣхъ скоростей, которыя эта точка получила

бы отъ каждой составляющей въ отдѣльности. Относительно P , Q , R легко повѣрить сказанное на основаніи (5).

65 Выраженія для P , Q , R черезъ Эйлеровы углы. Количества P , Q , R представляютъ собою проекціи мгновенной угловой скорости Ω на оси координатъ; иначе это составляющіе вектора Ω по координатнымъ осямъ. Можно было бы непосредственно получить выраженія для нихъ съ помощью Эйлеровыхъ угловъ, если въ (4) подставить формулы (7) § 57. Во избѣжаніе длинныхъ сокращеній мы выведемъ эти формулы инымъ обходнымъ путемъ.

Предварительно найдемъ вспомогательныя формулы для производныхъ отъ косинусовъ λ, \dots, ν . Началь неподвижныхъ осей перенесемъ въ точку A на положительныхъ половинкахъ подвижныхъ осей $1'_x, 1'_y, 1'_z$ возьмемъ три точки α, β, γ въ разстояніи отъ A равномъ единицѣ (координатами абсолютными x, y, z , этихъ точекъ будутъ:

$$\text{для } \alpha - \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z;$$

$$\text{для } \beta - \mu_x, \mu_y, \mu_z;$$

$$\text{для } \gamma - \nu_x, \nu_y, \nu_z.$$

Приложимъ выведенныя выраженія (5) къ этимъ точкамъ, тогда и получимъ исконыя формулы:

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = Q\lambda_x - R\nu_x; \quad \frac{d\lambda_y}{dt} = R\lambda_y - P\nu_y; \quad \frac{d\lambda_z}{dt} = P\lambda_z - Q\nu_z,$$

$$\frac{d\mu_x}{dt} = Q\mu_x - R\nu_x; \quad \frac{d\mu_y}{dt} = R\mu_y - P\nu_y; \quad \frac{d\mu_z}{dt} = P\mu_z - Q\nu_z, \quad (7)$$

$$\frac{d\nu_x}{dt} = Q\nu_x - R\nu_x; \quad \frac{d\nu_y}{dt} = R\nu_y - P\nu_y; \quad \frac{d\nu_z}{dt} = P\nu_z - Q\nu_z.$$

Выбравши три соответственныхъ уравненія изъ предыдущихъ, мы и сможемъ опредѣлить P , Q , R . Въ своемъ выборѣ будемъ руководствоваться замѣчаніемъ, сдѣланнымъ въ концѣ § 57.

Простѣйшій изъ косинусовъ ν_x дифференцируемъ его и затѣмъ, пользуясь равенствами (7), а также выраженіями (7) § 57, сокращаемъ на $\sin \varphi$; тогда получаемъ:

$$P \sin \varphi - Q \cos \varphi = - \frac{d\varphi}{dt}. \quad (8)$$

Производныя отъ λ и μ , содержатъ также P и Q . Остановиваемся, положимъ, на λ_x , тогда

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = \cos \varphi \cos \theta \varphi' + \sin \varphi \sin \theta \cdot \theta'$$

$$= \cos \varphi \cos \theta (P \sin \psi - Q \cos \psi) + \sin \theta (P \cos \psi + Q \sin \psi).$$

Пользуясь (8) и затѣмъ сокращая на $\sin \theta$, найдемъ:

$$P \cos \psi + Q \sin \psi = \sin \varphi \frac{d\theta}{dt}.$$

Отсюда и изъ (8) имѣемъ:

$$P = \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \cos \psi - \frac{d\varphi}{dt} \sin \psi;$$

(9)

$$Q = \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \sin \psi + \frac{d\varphi}{dt} \cos \psi;$$

Для опредѣленія R можемъ теперь воспользоваться любымъ изъ равенствъ (7), въ которыя входитъ R ; простѣйшими будутъ $\frac{d^2v_x}{dt^2}$ или $\frac{d^2v_y}{dt^2}$. Такимъ путемъ найдемъ:

$$(10) \quad R = \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt}.$$

Производная φ' носитъ названіе нутаціи, а производная ψ' прецессіи. Предъидущія равенства (9) и (10) на основаніи (7) § 57, а также фиг. 40 можно представить подъ такимъ видомъ:

$$\Omega \cos(\Omega x) = P = \theta' \cos(Ax, x) + \varphi' \cos(Ax, x) + \psi' \cos(Ax, x);$$

$$\Omega \cos(\Omega y) = Q = \theta' \cos(Ay, y) + \varphi' \cos(Ay, y) + \psi' \cos(Ay, y);$$

$$\Omega \cos(\Omega z) = R = \theta' \cos(Az, z) + \varphi' \cos(Az, z) + \psi' \cos(Az, z).$$

Обозначенія здѣсь тѣ же, что и въ § 57.

Отсюда заключаемъ, что векторъ Ω можно разсматривать какъ геометрическую сумму трехъ векторовъ: вектора θ' по Ax , вектора

φ' по AN и вектора ψ' по Az_1 :

$$(\Omega) = (\theta') + (\varphi') + (\psi').$$

Другими словами угловыя скорости θ' , φ' , ψ' служатъ составляющими мгновенной угловой скорости Ω по Az_1 , AN и Az_1 .

Примѣръ. Положимъ, что вращеніе твердаго тѣла задано уравненіями:

$$\alpha = \alpha; \quad \beta = f(t); \quad \gamma = k f(t);$$

гдѣ α и k постоянны. Въ такомъ случаѣ

$$P = k \sin \alpha \cos f, \quad \frac{df}{dt}; \quad Q = k \sin \alpha \sin f, \quad \frac{df}{dt},$$

$$R = (1 + k \cos \alpha) \frac{df}{dt}.$$

66. Проеціи скорости точекъ вращающаго твердаго тѣла на подвижныя оси, неизмѣнно съ тѣломъ связанныя. Выраженія для p , q , r черезъ Эйлеровы углы. Если скорость какой либо точки вращающаго твердаго тѣла назовемъ u , то

$$u \cos(w \xi) = u \cos(wx) \lambda_x + u \cos(wy) \lambda_y + u \cos(wz) \lambda_z = \\ = x' \lambda_x + y' \lambda_y + z' \lambda_z.$$

Замѣнимъ здѣсь x' , y' , z' ихъ выраженіями изъ (5), и λ_x , λ_y , λ_z представимъ подъ видомъ (5) § 57; тогда имѣемъ:

$$u \cos(w \xi) = \{ Q(z - z_1) - R(y - y_1) \} (\mu_y v_x - \mu_x v_y) + \\ + \{ R(x - x_1) - P(z - z_1) \} (\mu_x v_x - \mu_z v_z) + \\ + \{ P(y - y_1) - Q(x - x_1) \} (\mu_y v_y - \mu_z v_z).$$

А такое выраженіе легко сводится къ слѣдующему:

$$u \cos(w \xi) = (P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z) \{ (x - x_1)v_x + (y - y_1)v_y + (z - z_1)v_z \} \\ - (Pv_x + Qv_y + Rv_z) \{ (x - x_1)\mu_x + (y - y_1)\mu_y + (z - z_1)\mu_z \}.$$

Введемъ обозначенія:

$$\begin{aligned} p &= P\mu_x + Q\mu_y + R\mu_z = \Omega \cos(\Omega \xi); \\ q &= Pv_x + Qv_y + Rv_z = \Omega \cos(\Omega \eta); \\ r &= Pv_x + Qv_y + Rv_z = \Omega \cos(\Omega \zeta). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда найдемъ по (4) § 57:

$$(12) \quad w \cos(w \xi) = q \zeta - r \eta = \begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Подобнымъ образомъ получимъ еще:

$$(12') \quad w \cos(w \eta) = r \xi - p \zeta = \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix};$$

$$w \cos(w \zeta) = p \zeta - q \xi = \begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \zeta \end{vmatrix}.$$

Уравнение мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ будетъ

$$(13) \quad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Выраженія для p , q , r черезъ Эйлеровы углы всего быстрее получаются изъ того соображенія, что мгновенную угловую скорость (§ 65) можно разсматривать, какъ геометрическую сумму угловыхъ скоростей ψ' по $A\Lambda$, ψ' по $A\zeta_1$ и θ' по $A\zeta_2$. Тогда, пользуясь фиг. 40, найдемъ:

$$(14) \quad \begin{aligned} p &= -\psi' \sin \varphi \cos \theta + \theta' \sin \theta; \\ q &= \psi' \sin \varphi \sin \theta + \theta' \cos \theta; \\ r &= \psi' \cos \varphi + \theta'. \end{aligned}$$

Примѣръ: Когда

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = k t, \quad \theta = h t + c,$$

при α и k постоянныхъ —

$$p = -\sin \alpha \cos k t \frac{d\psi}{dt}; \quad q = \sin \alpha \sin k t \frac{d\psi}{dt}; \quad r = (\cos \alpha + h) \frac{d\theta}{dt}$$

67. Проекціи геометрической производной по времени отъ переменнаго вектора на оси неизмѣнно съ тѣломъ связанныя. Для проекции геометрической производной V отъ какой-либо векторь-функ-

ціи времени V на подвижное направление мы имѣемъ такое выраженіе:

$$\dot{V} \cos(Vl) = \frac{d}{dt} [V \cos(Vl)] - V \dot{\alpha} \cos(V\dot{\alpha}),$$

гдѣ α поворотная скорость (§ 42) направления l .

Вспользуемся этой формулой для вычисленія проекцій геометрической производной на подвижныя оси $A\xi, \eta, \zeta$. Начнемъ съ $A\xi$. Пусть проекціи вектора V на $A\xi, A\eta, A\zeta$ будутъ соответственно Ξ, Y, Z . Поворотная скорость α въ настоящемъ случаѣ — въ скорости точки α , лежащей на положительной половинѣ оси $A\xi$ въ разстояніи отъ A равномъ единицѣ. Проекція этой скорости на подвижныя оси означимъ u_ξ, u_η, u_ζ . Тогда имѣемъ:

$$\dot{V} \cos(\dot{V}\xi) = \frac{d\Xi}{dt} - (\Xi u_\xi + Y u_\eta + Z u_\zeta).$$

Но по 12), замѣчая, что для точки α координаты $\xi = 1, \eta = \zeta = 0$, находимъ:

$$u_\xi = 0; \quad u_\eta = r; \quad u_\zeta = q.$$

Слѣд. предъидущее равенство обращается въ такое:

$$\dot{V} \cos(\dot{V}\xi) = \frac{d\Xi}{dt} + Zq - Yr. \quad (15)$$

А для остальныхъ осей:

$$\dot{V} \cos(\dot{V}\eta) = \frac{dY}{dt} + \Xi r - Zp; \quad (15')$$

$$\dot{V} \cos(\dot{V}\zeta) = \frac{dZ}{dt} + Yp - \Xi q.$$

Примѣнимъ полученныя формулы къ нахожденію выраженій производныхъ по времени отъ косинусовъ ν, \dots, γ , черезъ величины p, q, r .

На положительныхъ половинахъ неподвижныхъ осей Ax, Ay, Az , возьмемъ три точки a, b, c , лежащихъ въ разстояніи

отъ A равномъ единицѣ. Относительныя координаты этихъ точекъ будутъ

для a — λ_x, μ_x, ν_x ; для b — λ_y, μ_y, ν_y ; для c — λ_z, μ_z, ν_z .

Точки a, b, c неподвижны, слѣд. скорости ихъ, т. е. геометрическія производныя по времени отъ радиусовъ векторовъ, равняются нулю. Прилагая (15) къ точкѣ a , получимъ:

$$(16) \quad 0 = \frac{d\lambda_x}{dt} + q\nu_x - r\mu_x; \quad 0 = \frac{d\mu_x}{dt} + r\lambda_x - p\nu_x; \quad 0 = \frac{d\nu_x}{dt} + p\mu_x - q\lambda_x.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ и остальные выраженія

$$(16') \quad 0 = \frac{d\lambda_y}{dt} - q\nu_y - r\mu_y; \quad 0 = \frac{d\mu_y}{dt} + r\lambda_y - p\nu_y; \quad 0 = \frac{d\nu_y}{dt} + p\mu_y - q\lambda_y.$$

$$0 = \frac{d\lambda_z}{dt} + q\nu_z - r\mu_z; \quad 0 = \frac{d\mu_z}{dt} + r\lambda_z - p\nu_z; \quad 0 = \frac{d\nu_z}{dt} + p\mu_z - q\lambda_z.$$

68. Скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ. Винтовая ось. Дифференцируемъ равенства (1) § 57, предполагая, что всѣ шесть координатъ тѣла измѣняются съ временемъ. Находимъ,

$$(17) \quad \begin{aligned} x' &= x_A' + \xi\lambda_x' + \eta\mu_x' + \zeta\nu_x'; \\ y' &= y_A' + \xi\lambda_y' + \eta\mu_y' + \zeta\nu_y'; \\ z' &= z_A' + \xi\lambda_z' + \eta\mu_z' + \zeta\nu_z'. \end{aligned}$$

Координаты ξ, η, ζ замѣняемъ координатами x, y, z . Тогда совершенно такимъ же образомъ, какъ и въ § 64, приведемъ предыдущія уравненія къ виду:

$$(18) \quad \begin{aligned} x' &= x_A' + Q(x - x_A) - R(y - y_A); \\ y' &= y_A' + R(x - x_A) - P(z - z_A); \\ z' &= z_A' + P(y - y_A) - Q(x - x_A). \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выраженія съ (27) § 18, мы видимъ, что скорость какой либо точки твердаго тѣла представляетъ собою

главный моментъ вокругъ этой точки системы приложенныхъ векторовъ, имѣющей своими координатами для полюса A :

$$P, Q, R, x_A', y_A', z_A';$$

т. е. характеризуемой для этого полюса своимъ главнымъ векторомъ $\Omega (P, Q, R)$ и главнымъ моментомъ $v_A(x_A', y_A', z_A')$.

Другими словами, скорость любой точки (x, y, z) тѣла равняется геометрической суммѣ скорости v_A и момента вектора Ω , приложеннаго къ A , вокругъ точки (x, y, z) . Скорость v_A , общая всемъ точкамъ тѣла, носитъ названіе поступательной скорости, а моментъ вектора Ω по § 54 представляетъ собою ту вращательную скорость точки (x, y, z) , которую она имѣла бы, если бы точка A была неподвижна. Прямая

$$\frac{x-x_A}{P} = \frac{y-y_A}{Q} = \frac{z-z_A}{R},$$

служащая основаніемъ вектора Ω сохраняетъ и здѣсь свое названіе мгновенной оси, только прибавляется названіе полюса—говорить: „мгновенная ось полюса A “.

Итакъ съ помощью формуль (18) скорость любой точки твердого тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ разлагается на поступательную и вращательную составляющія. Разложеніе это можно сдѣлать безчисленнымъ множествомъ способовъ, такъ какъ полюсомъ можетъ служить всякая точка твердаго тѣла. При змѣнѣ одного полюса другимъ поступательная скорость, вообще говоря, перемѣнится, но мгновенная угловая скорость Ω не измѣнитъ ни величины, ни направленія (§ 16). Останется также постоянной (§ 19), и проекція поступательной скорости на направленіе Ω .

$$v_A \cos (v_A \Omega) = \text{const.} \quad (19)$$

Среди безчисленнаго множества параллельныхъ между собою мгновенныхъ осей различныхъ полюсовъ выдѣляется одна центральная или винтовая ось. Точки, на ней лежація, имѣютъ наименьшую возможную скорость, направленную при томъ вдоль оси (§§ 20 и 21. Уравненія винтовой оси по 29) § 21 будутъ такое:

$$\frac{x-a}{P} = \frac{y-b}{Q} = \frac{z-c}{R}, \quad (20)$$

гдѣ

$$x = \xi + \frac{1}{\Omega^2} (Q_1 \xi' - R_0 \eta'), \quad y = \eta + \frac{1}{\Omega^2} (R_0 \xi' - Q_2 \eta'); \\ (21) \quad z = \varepsilon_A + \frac{1}{\Omega^2} (P_0 \xi' - Q_3 \eta').$$

Название винтовой дано оси потому, что траекториями точек тѣла служатъ винтовыя лини, если только поступательная и угловая скорость тѣла остаются постоянными. Чтобы убедиться въ этомъ, возьмемъ винтовую ось за t' , а полюсь A за начало координатъ. Тогда

$$P = Q = 0; \quad R = \Omega = \text{const.}; \quad x' = y' = 0, \quad z' = \varepsilon = \text{const.}$$

Уравненія (18) теперь даютъ;

$$\xi' = -\eta \Omega, \quad \eta' = \xi \Omega; \quad z' = \varepsilon.$$

Интегрируя последнее уравненіе, найдемъ:

$$z = \varepsilon t + z_0,$$

если шпичкомъ будемъ отмѣчать значенія переменныхъ для $t = 0$.

Изъ первыхъ двухъ уравненій легко получить такія двѣ комбинаціи:

$$x x' - y y' = 0;$$

$$x y' - y x' = (x^2 + y^2) \Omega.$$

Последнему уравненію можемъ дать видъ:

$$\left(\frac{y}{x} \right)' = \Omega \\ 1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 = \Omega^2$$

Интегрированіе такихъ преобразованныхъ уравненій даетъ:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2;$$

$$\text{arctg. } \frac{y}{x} = \Omega t + \text{arctg. } \frac{y_0}{x_0}.$$

Если введемъ цилиндрическія координаты (§ 39), то получимъ

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + \Omega t;$$

и слѣд. уравненіи траекторіи

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + \Omega t,$$

что и доказываетъ наше положеніе. Отношеніе $\frac{v}{\Omega}$, измѣряемое единицами длины, называется параметромъ винтовой оси. Произведение $2\pi \frac{v}{\Omega}$ носитъ названіе шага винтовой линіи. Изъ предъидущаго видимъ, что траекторіи точекъ тѣла въ разсматриваемомъ случаѣ винтовыя линіи одного и того-же шага.

Примѣръ. Пусть

$$\begin{aligned} x_0 &= a \sin f(t), & y_0 &= a \cos f(t), & z_0 &= 0, \\ \varphi &= \varphi_0 + f(t), & \psi &= kf(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$P = k \sin \varphi_0 \cos f(t); \quad Q = k \sin \varphi_0 \sin f(t); \quad R = (1 - k \cos \varphi_0) \cdot f';$$

$$\Omega^2 = f'^2 (1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0).$$

Уравненіе винтовой оси по (20) и (21):

$$\frac{x + D \sin f}{k \sin \varphi_0 \cos f} = \frac{y - D \cos f}{k \sin \varphi_0 \sin f} = \frac{z}{1 + k \cos \varphi_0} \quad (22)$$

гдѣ

$$D = ak \frac{k + \cos \varphi_0}{1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0}.$$

69. Проекція скорости точекъ твердаго тѣла, движущагося произвольнымъ образомъ, на подвижныя оси. Умножая выраженія (18) соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, складывая и преобразуя совершенно такъ, какъ въ § 66, получимъ для проекціи скорости какой либо точки тѣла на ξ_1 такое выраженіе

$$v \cos(\nu \xi_1) = x_1' \lambda_1 + y_1' \lambda_2 + z_1' \lambda_3 + q_1' \cos(\nu \xi_1) + q_2' \cos(\nu \xi_2) + q_3' \cos(\nu \xi_3), \quad (23)$$

в для других осей:

$$r \cos(\tau \gamma) = x' \mu_x + y' \mu_y + z' \mu_z + r^2 \xi - \rho^2 \zeta = v_4 \cos(v_4 \tau_1) + r^2 \xi - \rho^2 \zeta;$$

$$r \cos(\tau \zeta) = x' \nu_x + y' \nu_y + z' \nu_z + \rho \eta - q \xi = v_4 \cos(v_4 \tau_2) + \rho \eta - q \xi.$$

Уравнение винтовой оси в относительных координатах будетъ:

$$(24) \quad \xi + \frac{x}{p} = \frac{\eta - \beta}{q} - \frac{\zeta - \gamma}{r},$$

гдѣ по (21) и (5) § 57:

$$\begin{aligned} x &= (a - x_0) i_x + (b - y_0) i_y + (c - z_0) i_z = \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \{ (Qz_0' - R\eta_0')(\mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y) + (Rx_0' - P' \nu_0')(\mu_x \nu_x - \nu_y \mu_y) + \\ &+ (Py_0' - Q' \nu_0')(\mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y) \} = \frac{1}{\Omega^2} \{ q(x_0' \nu_x + y_0' \nu_y + z_0' \nu_z) - \\ &- r(x_0' \mu_x + y_0' \mu_y + z_0' \mu_z) \} = \\ &= \frac{1}{\Omega^2} [q v_4 \cos(v_4 \tau_2) - r v_4 \cos(v_4 \tau_1)]; \\ z &= \frac{1}{\Omega^2} [p v_4 \cos(v_4 \tau_2) - \rho v_4 \cos(v_4 \tau_1)]; \\ (25) \quad \gamma &= \frac{1}{\Omega^2} [p v_4 \cos(v_4 \tau_1) - q v_4 \cos(v_4 \tau_2)]. \end{aligned}$$

Примѣръ. Для того движениа которое было рассмотрѣно въ концѣ предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$p = \sin \varphi_0 \cos kf, \quad q = \sin \varphi_0 \sin kf, \quad r = (\cos z_0 + k) f$$

и уравненіе винтовой оси:

$$(26) \quad \xi + \frac{d \sin kf}{\sin \varphi_0 \cos kf} = \frac{\eta + d \cos kf}{\sin \varphi_0 \sin kf} - \frac{\zeta}{\cos \varphi_0 + k}.$$

гл.

$$d = a \frac{1 + k \cos \varphi_0}{1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0}.$$

70. Скорости точекъ тѣла, движущагося параллельно плоскости.

Мгновенный центръ. Обратимся теперь къ тому частному случаю движенія твердаго тѣла, когда постоянная въ выраженіи (19) во все время движенія равняется нулю, т. е. скорости точекъ тѣла перпендикулярны къ неподвижному направленію. Очевидно, тогда мы имѣемъ движеніе, разсмотрѣнное въ § 59 и называемое движеніемъ параллельно плоскости. Скорости точекъ на винтовой оси равняются теперь нулю, и слѣд. въ каждой подвижной плоскости одна изъ точекъ, пересѣченіе винтовой оси съ плоскостью, находится въ мгновенномъ покоѣ. Такая точка носитъ названіе мгновеннаго центра. Вырженія для скоростей точекъ твердаго тѣла въ разсматриваемомъ движеніи легко получить изъ (18). Беремъ направленія осей Ox и Oz по перпендикулярю къ семейству параллельныхъ плоскостей; тогда по § 59 и фиг. 42 должны положить

$$z'_1 = 0; \quad P = Q = 0; \quad R = \frac{dv}{dt};$$

$$p = q = 0; \quad r = \frac{d\theta}{dt};$$

$$\lambda_x = \cos \theta; \quad \lambda_y = \sin \theta; \quad \mu_x = -\sin \theta; \quad \mu_y = \cos \theta;$$

$$\lambda_z = \mu_z = v_x = v_y = 0; \quad v_z = 1.$$

Такимъ образомъ для неподвижныхъ осей имѣемъ

$$x' = -y' + (y - y_1)\theta'; \quad y' = y_1 + (x - x_1)\theta'; \quad z' = 0 \quad (27)$$

А для подвижныхъ:

$$v \cos(v \xi) = x'_1 \cos \theta + y'_1 \sin \theta - \eta \theta';$$

$$v \cos(v \eta) = -x'_1 \sin \theta + y'_1 \cos \theta + \xi \theta';$$

$$v \cos(v \zeta) = 0. \quad (28)$$

Мгновенный центръ для какой либо плоскости опредѣлится, если станемъ искать точку, находящуюся въ мгновенномъ покоѣ.

Приравнивая нулю лѣвыя части предыдущихъ выраженій, получаемъ для искомой точки такія абсолютныя координаты x, y :

$$(29) \quad x = x_0 + \frac{1}{\theta'} (x_0' - x_0) - a; \quad y = y_0 + \frac{1}{\theta'} (y_0' - y_0) + b;$$

а относительными координатами ξ, η , служить:

$$(30) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\theta'} (x_0' \sin \theta - y_0' \cos \theta) - b \sin \theta + a \cos \theta; \\ \eta &= \frac{1}{\theta'} (x_0' \cos \theta + y_0' \sin \theta) - b \cos \theta - a \sin \theta. \end{aligned}$$

Съ помощью этихъ выраженій можемъ формулы (27) и (28) переписать такъ:

$$\begin{aligned} x' &= -\theta y - y_0 \theta'; & y' &= x - x_0 \theta'; \\ v \cos \tau \xi &= -(\eta - \eta_0) \theta'; & v \cos \tau \eta &= (\xi - \xi_0) \theta'. \end{aligned}$$

Мы видимъ по (5) и (12), что скорости точекъ плоской фигуры таковы, какъ будто эта фигура вращалась около мгновеннаго центра, какъ около неподвижнаго полюса (срав. § 61). Отсюда вытекаетъ, что прямая, соединяющая мгновенный центръ съ какою либо точкою фигуры, нормальна къ траекторіи этой точки.

Примѣръ. Въ Кардановскомъ движеніи (§ 69) получаются такія выраженія для координатъ мгновеннаго центра.

$$(31) \quad x = 2R \cos t; \quad y = 2R \sin t;$$

$$(32) \quad \xi = R \cos 2t; \quad \eta = R \sin 2t.$$

ГЛАВА V.

Центроиды. Аксоиды.

71. Центроиды. Мы уже видели раньше (§ 70), что движение плоской фигуры въ ея плоскости можно разсматривать какъ сплошной рядъ поворотовъ на безконечно малые углы вокругъ соответственныхъ мгновенныхъ центровъ. Мгновенный центръ для даннаго движенія въ различные моменты времени совпадаетъ съ различными точками какъ неподвижной такъ и подвижной плоскости, слѣдъ оныхъ движется въ обѣихъ плоскостяхъ. Траекторіи мгновеннаго центра въ неподвижной и подвижной плоскостяхъ называются соответственно неподвижной и подвижной центроидами. Уравненіями движенія мгновеннаго центра въ этихъ плоскостяхъ служатъ равенства (29) и (30) § 70, поэтому уравненія центроидъ найдутся черезъ исключеніе времени изъ правыхъ частей названныхъ равенствъ. Подвижная центроида вмѣстѣ съ движущеюся фигурою перемищается по неподвижной плоскости. Можно показать, что подвижная центроида катится по неподвижной; иначе, во все время движенія обѣ кривыя касаются другъ друга. Кромѣ того, катаніе это не сопровождается скольженіемъ, т. е. общая точка кривыхъ за одинъ и тотъ же промежутокъ времени проходитъ по обѣимъ кривымъ одно и то же разстояніе.

Означимъ длины дугъ неподвижной и подвижной центроидъ черезъ s и σ ; длина дуги, пройденной мгновеннымъ центромъ по той и другой траекторіи за промежутокъ времени dt пусть будетъ ds и $d\sigma$; причемъ направленія ds и $d\sigma$ совпадаютъ съ направленіемъ скорости мгновеннаго центра по соответственной кривой. Тогда

$$dx_c = x' dt = ds \cos(ds, x); \quad dy_c = y' dt = ds \cos(ds, y);$$

$$d\xi_c = \xi'_c dt = d\sigma \cos(d\sigma, \xi); \quad d\eta_c = \eta'_c dt = d\sigma \cos(d\sigma, \eta).$$

Но по (30) § 70:

$$d\xi_c^2 = db \cdot \sin \theta + da \cdot \cos \theta + (b \cdot \cos \theta - a \cdot \sin \theta) \theta' dt;$$

$$d\eta_c^2 = db \cdot \cos \theta - da \cdot \sin \theta - (b \cdot \sin \theta + a \cdot \cos \theta) \theta' dt.$$

Замѣняя a и b ихъ выраженіями изъ (29) того же § 70, получимъ:

$$d\xi_c^2 = (dx_1 + da) \cos \theta + (dy_1 + db) \sin \theta = dx_1 \cos \theta + dy_1 \sin \theta;$$

$$d\eta_c^2 = -(dx_1 - da) \sin \theta + (dy_1 - db) \cos \theta = -dx_1 \sin \theta + dy_1 \cos \theta.$$

Пусть въ разсматриваемый моментъ подвижныя оси параллельны неподвижнымъ, т. е. $\theta = 0$, тогда

$$d\xi_c = dx_1; \quad d\eta_c = dy_1.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$d\sigma^2 = ds^2;$$

и слѣд. по раздѣленіи на $d\sigma$ $ds: \frac{d\xi_c}{d\sigma} = \frac{dx_1}{ds}; \quad \frac{d\eta_c}{d\sigma} = \frac{dy_1}{ds};$

или:

$$\cos d\sigma, \xi_c = \cos(ds, x_1); \quad \cos(d\sigma, \eta_c) = \cos(ds, y_1).$$

Такимъ образомъ высказанное положеніе доказано, ибо оси по условію параллельны.

Если вмѣсто прямого движенія станемъ разсматривать обращенное, то центры только помѣняются ролями: неподвижная станетъ подвижною и наоборотъ.

Примѣры: 1) Для Карлановскаго движенія изъ формул (31) и (32) § 70 находимъ такія уравненія центровъ — неподвижной:

$$x_c^2 + y_c^2 = 4R^2,$$

и подвижной:

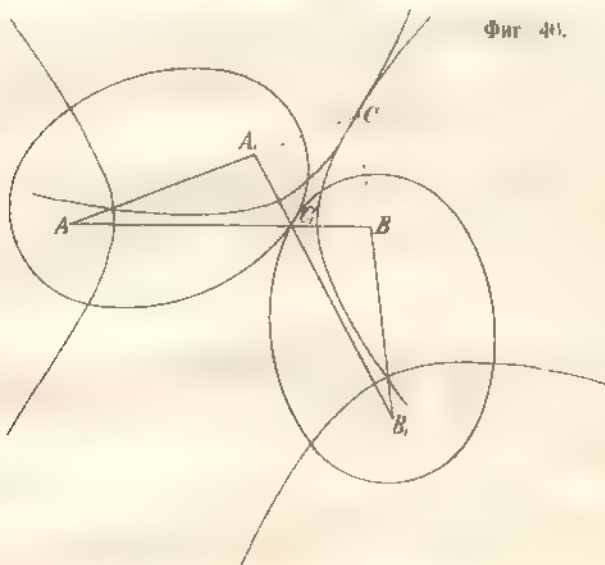
$$x^2 + y^2 = h^2$$

Обѣ кривыя окружности; неподвижная въ два раза больше подвижной и лежитъ внутри подвижной.

Эти заключенія мы могли бы вывести и элементарнымъ путемъ, пользуясь тѣмъ замѣчаніемъ, что прямая, соединяющая мгновенный центръ съ какою либо точкою подвижной фигуры нормальна къ траекторіи этой точки

Мы знаем (§ 60), что Кардановское движение получается тогда, когда две точки фигуры M_1 и M_2 (фиг. 43) движутся по двум взаимноперпендикулярным прямым Ox и Oy , расстояние $M_1M_2 = 2R$. Возстаповив перпендикуляры к Ox и Oy в точках M_1 и M_2 , мы получим мгновенный центр C , как их пересечение. Так как расстояние $OC = M_1M_2 = 2R$, то, очевидно, неподвижная центроида окружность центра O и радиуса $2R$. Угол M_1CM_2 прямой, слѣд. подвижная центроида окружность, построенная на M_1M_2 , как на диаметръ.

2) Пусть имеем антипараллелограмм A_1B_1B (фиг. 46), т. е. четырехугольник, противоположные стороны которого равны и пересекаются. Укрѣпим неподвижно одну из сторон, напр. большую AB , тогда другая



Фиг. 46.

большая A_1B_1 может двигаться. Найдѣмъ для этого движѣнія центроида. Траекторіи точек A_1 и B_1 окружности центров A и B , слѣд. искомымъ центр C лежитъ на пересѣченіи прямыхъ AA_1 и BB_1 . Изъ равенства треугольничковъ ACB и A_1CB_1 слѣдуетъ:

$$CA - CB = AA_1 = \text{const.},$$

поэтому неподвижная центроида гиперболы съ фокусами въ A и B .

Далѣе

$$CB_1 - CA_1 = BB_1 = \text{const.},$$

слѣд. подвижная центроида также гиперболы, равная предыдущей и имѣющая фокусами точки A , в B_1 .

Если закрѣпимъ неподвижно меньшую сторону AA_1 , то легко видѣть, что для движенія по плоскости стороны BB_1 , центроидами служатъ два равныхъ между собою эллипса съ фокусами въ A и A_1 , въ B и B_1 .

72. Аксоиды для вращательнаго движенія. Когда твердое тѣло вращается около неподвижнаго полюса A , то мгновенная ось (§ 64), перемѣщаясь какъ въ самомъ тѣлѣ, такъ и въ неподвижной средѣ, описываетъ въ этихъ средѣхъ двѣ конечныя поверхности, носительницы названія подвижнаго и неподвижнаго аксоидовъ. Уравненія этихъ поверхностей пайдутся, если исключить время изъ двухъ уравненій (6) § 64 — для неподвижнаго аксоида, или изъ двухъ уравненій (13) § 66 для подвижнаго. Аксоидъ подвижной, будучи неизмѣнно связанъ съ вращающимся тѣломъ, вмѣстѣ съ нимъ перемѣщается въ пространствѣ. Двѣ разсматриваемыя конечныя поверхности въ каждый моментъ времени имѣютъ общую производящую (мгновенную ось для взятаго момента). Движеніе подвижнаго аксоида происходитъ такъ, что онъ катится по неподвижному безъ скольженія. Другими словами, оба конуса во все время движенія касаются другъ друга по общей производящей; кромѣ того, любая точка мгновенной оси за одинъ и тотъ же промежутокъ времени проходитъ по обѣимъ поверхностямъ путь одинаковой длины. Чтобы убѣдиться въ сказанномъ, достаточно показать, что скорости произвольной точки мгновенной оси въ двухъ движеніяхъ — относительно вращающагося тѣла и въ неподвижной средѣ — геометрически равны между собою.

Выберемъ точку m на разстояніи h отъ полюса A ; тогда, сохраняя принятыя нами обозначенія, можемъ написать уравненія движенія точки m въ неподвижной средѣ такъ:

$$x = x_A + k \frac{P}{\Omega}; \quad y = y_A + k \frac{Q}{\Omega}; \quad z = z_A + k \frac{R}{\Omega}.$$

А уравненія движенія относительно вращающагося тѣла будутъ:

$$\xi = k \frac{P'}{\Omega}; \quad \eta = k \frac{Q'}{\Omega}; \quad \zeta = k \frac{R'}{\Omega}.$$

Означимъ скорости точки m въ неподвижной средѣ и въ тѣлѣ, соответственно v и v' ; тогда, дифференцируя предыдущія уравненія, получимъ:

$$v \cos(\sigma, x) = v' - \frac{h}{\Omega^2} (\Omega P' - \Omega P''), \quad v \cos(\sigma, y) = v' + \frac{h}{\Omega^2} (\Omega Q' - \Omega Q''),$$

$$v \cos(v, \varepsilon) = v' = \frac{k}{\Omega^2} (\Omega R' - R \Omega');$$

$$u \cos(u, \xi) = \xi' = \frac{k}{\Omega^2} (\Omega P' - P \Omega'); \quad u \cos(u, \eta) = \eta' = \frac{h}{\Omega^2} (\Omega Q' - Q \Omega'),$$

$$w \cos(w, \zeta) = \zeta' = \frac{k}{\Omega^2} (\Omega S' - S \Omega').$$

Мы уже имели в (11) § 66:

$$p = P\lambda_x + Q\lambda_y + R\lambda_z.$$

Дифференцируя по времени, находимъ:

$$p' = P'\lambda_x + Q'\lambda_y + R'\lambda_z + (P\lambda_x' + Q\lambda_y' + R\lambda_z').$$

Выражение, стоящее въ скобкахъ, обращается въ нуль по (7) § 65, следовательно

$$p' = P'\lambda_x + Q'\lambda_y + R'\lambda_z.$$

Пользуясь выражениями для p и p' , можем написать:

$$u \cos(u, \xi) = \frac{l}{\Omega^2} (\Omega P' - P' \Omega) \lambda_x + \frac{h}{\Omega^2} (\Omega Q' - Q \Omega') \lambda_y + \\ + \frac{k}{\Omega^2} (\Omega R' - R \Omega') \lambda_z = \xi' \lambda_x + \eta' \lambda_y + \zeta' \lambda_z = v \cos(v, \xi)$$

Подобнымъ образомъ:

$$u \cos(u, \eta) = v \cos(v, \eta); \quad u \cos(u, \xi) = v \cos(v, \xi),$$

что и доказываетъ требуемое.

Примѣръ. Для вращения, заданнаго уравненіями

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0; \quad \dot{x}_1 = \tau, \quad \dot{y}_1 = \tau(t), \quad \dot{z}_1 = h(t),$$

гдѣ α и k постоянныя, получаемъ такія уравненія мгновенно оси въ абсолютныхъ и относительныхъ координатахъ:

$$\frac{x}{k \sin \alpha \cos f} = \frac{y}{k \sin \alpha \sin f} = \frac{z}{1 + k \cos \alpha};$$

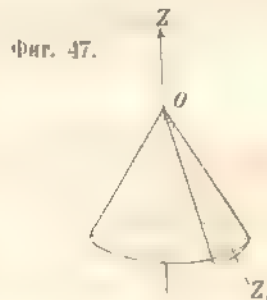
$$-\frac{\dot{x}}{\sin \alpha \cos kf} = \frac{\dot{y}}{\sin \alpha \sin kf} = \frac{\dot{z}}{\cos \alpha + k}.$$

Исключая время, находимъ уравненія аксондовъ неподвижнаго и подвижнаго

$$\frac{x^2 + y^2}{k^2 \sin^2 \alpha} = (1 + k \cos \alpha)^2 z^2 \quad (1);$$

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sin^2 \alpha} = (\cos \alpha + k)^2 \dot{z}^2 \quad (1').$$

Оба аксонда — конусы вращенія. Углы растворенія конусовъ и расположеніе ихъ другъ относительно друга могутъ быть самые разнообразныя. Напр. если станемъ разсматривать вращеніе земли, пренебрегая нутаціей и принимая въ соображеніе лишь суточное вращеніе и прецессию, то расположеніе аксондовъ будетъ такое, какъ показано на фиг. 47. Здѣсь O центръ земли, OZ направлена по оси эклиптики къ сѣверному полюсу эклиптики; OZ_1 идетъ къ южному полюсу земли; $\angle ZOZ_1 = \pi - \delta$, гдѣ δ наклоненіе эклиптики въ экватору и равно приблизительно $23^\circ 27' 17''$; уголъ растворенія подвижнаго аксонда равняется приблизительно 114° .



73. Полный изгибъ поверхности. Загируиваніе поверхности. Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію аксондовъ для общаго случая движенія твердаго тѣла, остановимся на нѣкоторыхъ теоремахъ, относящихся къ теоріи поверхностей.

Возьмемъ на данной поверхности S произвольную точку M . Касательную плоскость къ поверхности S въ этой точкѣ назовемъ P . Отступимъ отъ M по S въ произвольномъ направленіи MM' къ точкѣ M' . Тогда, чтобы получить касательную плоскость P' къ данной поверхности въ точкѣ M' ,

намъ надо будетъ плоскость P повернуть на пѣкотои уголъ ω около оси, совпадающей съ линіей пересѣченія плоскостей P и P'

Пусть уравненіе данной поверхности:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Частныя производныя отъ F по x, y, z для точки M означимъ F'_x, F'_y, F'_z , а для M' черезъ F'_x', F'_y', F'_z' . Тогда уголъ поворота ω , какъ уголъ между нормальми N и N' къ S въ точкахъ M и M' , найдется изъ равенства:

$$\cos \omega = \frac{F'_x F'_x' + F'_y F'_y' + F'_z F'_z'}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2} \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}$$

Направленіе же оси вращения Ω определяется косинусами

$$\cos(\Omega x) = \frac{1}{\Delta} (F'_y F'_z' - F'_z F'_y');$$

$$\cos(\Omega y) = \frac{1}{\Delta} (F'_z F'_x' - F'_x F'_z');$$

$$\cos(\Omega z) = \frac{1}{\Delta} (F'_x F'_y' - F'_y F'_x');$$

гдѣ

$$\Delta = \sqrt{(F'_y F'_z' - F'_z F'_y')^2 + (F'_z F'_x' - F'_x F'_z')^2 + (F'_x F'_y' - F'_y F'_x')^2}$$

Ось эта перпендикулярна къ плоскости параллельной нормальми N и N' и направлена въ ту сторону, откуда видимъ нормаль Δ нѣтъ, а N' направо

Изъ выраженія для $\cos \omega$ имѣемъ:

$$\sin^2 \omega = \zeta^2 \zeta'^2 - \Delta^2,$$

если

$$\zeta^2 = F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2; \quad \zeta'^2 = F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2$$

Условимся называть полныи изгибомъ поверхности въ точкѣ M по направленію MM' предѣлъ отношенія

$$MM'$$

при MM' безконечно маломъ. Тогда, если MM' означимъ ds , а полный изгибъ поверхности по направленію ds черезъ ζ , то изъ предыдущей формулы для $\sin \omega$, получимъ:

$$\zeta = \frac{1}{\zeta'} \left\{ F'_y \frac{dF'_z}{ds} - F'_z \frac{dF'_y}{ds} + F'_z \frac{dF'_x}{ds} - F'_x \frac{dF'_z}{ds} + F'_x \frac{dF'_y}{ds} - F'_y \frac{dF'_x}{ds} \right\}.$$

За направление θ , или полного изгиба, мы принимаем направление предельнаго положенія оси Ω , слѣд.

$$\cos(\theta, x) = \frac{1}{\vartheta \cdot \varrho^2} \left(F_y \frac{dF_x}{ds} - F_x \frac{dF_y}{ds} \right);$$

$$\cos(\theta, y) = \frac{1}{\vartheta \cdot \varrho^2} \left(F_x \frac{dF_y}{ds} - F_y \frac{dF_x}{ds} \right);$$

$$\cos(\theta, z) = \frac{1}{\vartheta \cdot \varrho^2} \left(F_z \frac{dF_x}{ds} - F_x \frac{dF_z}{ds} \right).$$

здѣсь для ϑ берется знакъ положительный.

Если уравненіе поверхности дано въ явномъ видѣ:

$$\varphi(x, y) - z = 0,$$

то при обыкновенныхъ обозначеніяхъ:

$$\vartheta \cos(\theta, x) = 1 + p^2 + q^2 \frac{dq}{ds};$$

$$\vartheta \cos(\theta, y) = \frac{-1}{1 + p^2 + q^2} \frac{dp}{ds};$$

$$(1) \quad \vartheta \cos(\theta, z) = \frac{1}{1 + p^2 + q^2} \left(p \frac{dq}{ds} - q \frac{dp}{ds} \right).$$

Полный изгибъ поверхности можно разсматривать какъ угловую скорость при движеніи касательной плоскости по поверхности, разчитанную только на единицу длины, а не на единицу времени. Эту угловую скорость разложимъ на двѣ составляющія — по тому направленію ds , по которому мы отступали, и по направленію n , къ нему перпендикулярному. Последнее направленіе лежитъ въ касательной плоскости, такъ какъ изъ предыдущихъ выраженій видно, что ось θ лежитъ сама въ касательной плоскости.

Составляющую по n назовемъ чистымъ изгибомъ поверхности и означимъ ϑ_n . Легко убѣдиться, что ϑ_n ничто иное, какъ кривизна нормальнаго сѣченія поверхности, проведеннаго черезъ ds . Поэтому останавливаться на изученіи свойствъ этой величины мы не станемъ.

Другую составляющую, по направленію ds , назовемъ закручиваніемъ поверхности по данному направленію и означимъ ϑ_s .

Умножая соответственно выраженія (1) на $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ и складывая, получимъ:

$$(2) \quad \vartheta_s = (1 + p^2 + q^2)^{-1} \left[\frac{dq}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dp}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + p \frac{dq}{ds} - q \frac{dp}{ds} \right] \frac{dz}{ds}.$$

74. Закручивание линейчатой поверхности вдоль производящей. Предполагая, что данная поверхность линейчатая, разберемъ, какъ измѣняется полный изгибъ поверхности вдоль какой либо производящей. Возьмемъ эту производящую за Ox . Очевидно, тогда

$$r = 0; \quad \frac{dx}{ds} = 1; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0;$$

кроме того $\theta_1 = 0$, такъ какъ касательная плоскость можетъ лишь вращаться около производящей. Производная $r = 0$ для любой точки вдоль Ox , слѣд. и $r' = 0$. Пользуясь (2), получимъ въ настоящемъ случаѣ

$$\theta_1 = 1 + q^2. \quad (8)$$

Если наша поверхность развертывающаяся, то изъ дифференціального уравненія ея:

$$r' - s^2 = 0,$$

при $r = 0$, вытекаетъ, что для всякой точки производящей $s = 0$, а потому по (3) и $\theta_1 = 0$, т. е. плоскость, касательная къ развертывающейся поверхности въ какой либо точкѣ на производящей, касается поверхности вдоль всей производящей.

Положимъ теперь, что данная поверхность кривая. Возьмемъ начало координатъ на линіи суженія поверхности, а Oy направимъ по кратчайшему разстоянію между производящею Ox и смежною; слѣд. плоскость xOy будетъ теперь касательною къ поверхности.

Пусть уравненія любой производящей:

$$x = ax + \alpha; \quad y = bx + \beta; \quad (4)$$

гдѣ a, b, α, β функціи некотораго параметра λ . Если производящей, совпадающей съ Ox , соответствуетъ значенію параметра λ_1 , то для него $a = b = \alpha = \beta = 0$.

Уравненія проекціи на xOy смежной производящей:

$$y = (b + b'd\lambda)x + \beta + \beta'd\lambda$$

заятыю обозначаемъ производныя по λ .

По условію Oy совпадетъ съ кратчайшимъ разстояніемъ между Ox и смежною производящею, слѣд. изъ предыдущаго выраженія для $\lambda = \lambda_0$:

$$b' = 0,$$

Первое изъ уравненій (4) можно разсматривать, какъ уравненіе самой кривой поверхности, если представимъ себѣ, что параметръ λ выраженъ, какъ функція отъ x и y , изъ втораго уравненія. Поэтому изъ перваго

$$\frac{dx}{dr} = p = a + (a' + \alpha') \frac{dr}{dr};$$

но изъ второго:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{b'x + \beta'}$$

следовательно

$$p = a - b \frac{a'x + \alpha'}{b'x + \beta'}$$

Дифференцируя последнее равенство по y , находим:

$$\frac{dp}{dy} = - \left\{ a' - b' \frac{a'x + \alpha'}{b'x + \beta'} - b \frac{d}{dy} \frac{a'x + \alpha'}{b'x + \beta'} \right\} \frac{dy}{dy}$$

но

$$1 = (b'x + \beta') \frac{dy}{dy}$$

следовательно

$$\frac{dp}{dy} = \frac{a'\beta' - b'\alpha'}{(b'x + \beta')^2} - \frac{b}{b'x + \beta'} \frac{d}{dx} \frac{a'x + \alpha'}{b'x + \beta'}$$

Давем λ частное значение x_0 ; тогда видим по предыдущему, что для всехъ точекъ производящей Ox производная p принимаетъ постоянное значение:

$$p = \frac{a'}{\beta'} - \frac{1}{\lambda}$$

постоянная λ носитъ название параметра распределения. Можно было бы показать, что λ равняется предѣлу отношенія крайняго разстоянія между смежными производящими β/d , къ тангенсу угла между ними: $a'/d\lambda$.

(Значимъ черезъ φ уголъ нормали къ поверхности въ какой либо точкѣ на Ox съ Oz , или, что то же, уголъ касательной плоскости съ xOy , тогда изъ (3)

$$\frac{dz}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\lambda} dx$$

откуда, интегрируя, получаемъ известную формулу:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\lambda} l,$$

гдѣ l разстояние точки на производящей отъ начала координатъ, z е отъ точки встрѣчи производящей съ линіею суженія

Прямая. Определим параметры распределения касательных плоскостей по произвольной охлонузого гиперболюла вращения. Уравнение поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Уравнения пары производящих, встречающихся, (Ox)

$$x = a, \quad \frac{y}{z} = \pm \frac{a}{c}.$$

Косинус угла нормали къ поверхности въ какой либо точке (x, y, z) въ осяхъ производящих съ Ox :

$$\cos \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{c^2} \sqrt{\frac{y^2 c^2}{a^2} - z^2 a^2}.$$

Если же примемъ во вниманіе уравнения производящихъ, то найдемъ

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{c^2} (x^2 + y^2)$$

и следовательно

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \pm \frac{1}{c}.$$

Такимъ образомъ, некоторый параметръ оказывается равнымъ минимой полуоси поверхности.

75 Аксиоды винтовых осей. Положимъ теперь, что твердое тѣло движется произвольнымъ образомъ. Винтовая ось, вообще говоря, будетъ измѣняться, въ своемъ движеніи внутри тѣла и въ неподвижной средѣ она опишетъ двѣ лицеватая поверхности, носящія названія подвижной и неподвижнаго аксоидовъ. Аксиоды въ каждый моментъ будутъ имѣть общую производящую—винтовую ось для даннаго момента. Покажемъ, что эти двѣ поверхности касаются другъ друга вдоль всей общей производящей. Возьмемъ какую либо точку m на этой производящей; ея абсолютныя координаты пусть будутъ x, y, z , а относительныя ξ, η, ζ ; скорость движенія m въ неподвижной средѣ назовемъ v , а скорость въ тѣлѣ пусть будетъ u . Тогда, дифференцируя по времени первое изъ равенствъ (1) § 57:

$$x = x_A + \xi \lambda + \eta \mu + \zeta \nu, \quad (6)$$

найдемъ:

$$v \cos(v, \rho) = \rho' = (\alpha_1 \cdot \xi' + \gamma_1 \mu' + \zeta_1 \nu') \cdot \xi' + \gamma_1 \mu' + \zeta_1 \nu'.$$

Выраженіе, заключенное въ скобки, представляетъ собою результатъ дифференцированія формулы (6) при ξ, γ, ζ постоянныхъ т. е. проекцію на $O\rho$ скорости u той точки твердаго тѣла, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ со взятою точкою на аксондѣ.

Итакъ

$$\begin{aligned} v \cos(v, \rho) &= u \cos(u, \rho) + w [\cos(u, \xi) \xi' + \cos(u, \gamma) \gamma' + \cos(u, \zeta) \zeta'] = \\ &= u \cos(u, \rho) + w \cos(u, \rho). \end{aligned}$$

Подобнымъ образомъ

$$v \cos(v, y) = u \cos(u, y) + w \cos(w, y);$$

$$v \cos(v, z) = u \cos(u, z) + w \cos(w, z).$$

Полученныя три равенства можно замѣнить однимъ геометрическимъ

$$(7) \quad v = (u) + (w).$$

Скорость u , какъ скорость точки, лежащей на винтовой оси, параллельна общей производящей аксондовъ, слѣдъ предыдущее выраженіе доказываетъ, что три прямыхъ: производящая (u), касательная къ подвижному аксонду (w) и касательная къ неподвижному (v), лежатъ въ одной плоскости. Другими словами касательныя плоскости къ подвижной и неподвижной поверхностямъ совпадаютъ другъ съ другомъ для любой точки на общей производящей, что и ждали доказать.

Такимъ образомъ движеніе подвижнаго аксонда представляетъ собою катаніе по неподвижному, но катаніе, сопровождаемое скольженіемъ вдоль общей производящей, какъ это видно изъ равенства (7).

Припомнимъ теперь геометрическія теоремы относительно линейчатыхъ поверхностей, приведенныя въ § 74. Двѣ произвольно взятая линейчатая поверхности, вообще говоря, не могутъ служить аксондами, изъ того обстоятельства, что аксонды должны касаться другъ друга вдоль всей общей производящей. вытекаютъ слѣдующія соотношенія между поверхностями и ихъ положеніемъ другъ относительно друга:

1) поверхности должны быть или обѣ развертывающіяся, или обѣ косыя;

2) если поверхности обѣ косыя, то онѣ должны имѣть одинаковые параметры распределенія по общій производящей, лини съуженія должны имѣть общую точку на этой производящей и въ этой точкѣ касательныя плоскости должны совпадать;

3) если поверхности обѣ развертывающіяся, то ребра возврата должны касаться общей производящей въ одной и той же точкѣ, — иначе катаніе сопрягаемое бы ея скрѣжеишемъ по направлению, перпендикулярному къ производящимъ.

Мы видимъ, что движеніе подвижной поверхности по неподвижной во весть случаевъ вполне определенное.

Если вмѣсто прямого движенія станемъ разсматривать обратное, то аксонды только помѣнятся своими ролями: подвижной станетъ неподвижнымъ и наоборотъ.

Примѣръ: Для движенія разсмотрѣннаго нами въ концѣ §§ 68 и 69 уравненія винтовой оси были въ абсолютныхъ координатахъ:

$$\frac{x + D \sin f}{k \sin \varphi_0 \cos f} = \frac{y - D \cos f}{k \sin \varphi_0 \sin f} = z \quad (8)$$

или

$$D = ak \frac{k + \cos \varphi_0}{1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0};$$

а въ относительныхъ

$$\frac{\xi + d \sin kf}{\sin \varphi_0 \cos kf} = \frac{\eta - d \cos kf}{\sin \varphi_0 \sin kf} = \zeta \quad (9)$$

или

$$d = a \frac{1 + k \cos \varphi_0}{1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0}.$$

Изъ первыхъ двухъ отношеній (8) находимъ:

$$D = y \cos f - z \sin f.$$

Возвышаемъ теперь все отношенія въ квадратъ и ищемъ, что отношеніе суммы двухъ первыхъ предыдущихъ членовъ къ суммѣ послѣдующихъ равно послѣднему отношенію. Тогда, пользуясь предыдущимъ равенствомъ, выйдемъ:

$$\frac{x^2 + y^2 - D^2}{k^2 \sin^2 \varphi_0} = \frac{z^2}{(1 + k \cos \varphi_0)^2}.$$

или

$$\frac{z^2 + y^2}{D^2} = \frac{z^2}{D_1^2} - 1.$$

если

$$D_1 = \frac{D(1 + k \cos \varphi_0)}{k \sin \varphi_0} = a \frac{(k + \cos \varphi_0)(1 + k \cos \varphi_0)}{\sin \varphi_0 (1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0)}.$$

Совершенно таким же путем получим уравнение поперечного аксоида или (9):

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{d^2} = \frac{\xi^2}{d_1^2} - 1$$

если

$$d_1 = d \frac{k + \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = a \frac{(k + \cos \varphi_0)(1 + k \cos \varphi_0)}{\sin \varphi_0 (1 + k^2 + 2k \cos \varphi_0)} = D_1.$$

(Об). поверхности — однополые гиперболоиды вращения. Параметры распределения по произвольным у них: равны, так как равны минимья полуоси d_1 и D_1 (§ 74).

ГЛАВА VI.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла.

76. Проектии ускоренія точекъ твердаго тѣла на неподвижныя оси. Для полученія проекцій ускоренія r какой либо точки твердаго тѣла на оси неподвижныя стоитъ только продифференцировать по времени выраженія для проекцій скорости точки на эти направленія. Поэтому беремъ выраженія (18) § 68.

$$\begin{aligned} x' &= x_A' + Q(z - z_A) - R(y - y_A); \\ y' &= y_A' + R(x - x_A) - P(z - z_A); \\ z' &= z_A' + P(y - y_A) + Q(x - x_A); \end{aligned} \quad (1)$$

Дифференцируемъ первое изъ нихъ, найдемъ:

$$x \cos \alpha x = x'' - z'' + Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) + Q(x' - x_A') - R(y' - y_A').$$

Подставляя сюда изъ (1), ^{x, y, z} ~~изъ~~ ^{получимъ:}

$$\begin{aligned} x \cos \alpha x &= x_A'' + Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) + \\ &+ P \{ P(x - x_A) + Q(y - y_A) - R(z - z_A) \} - \Omega^2(x - x_A). \end{aligned} \quad (2)$$

Для двухъ другихъ осей получимъ такимъ же способомъ:

$$\begin{aligned} y \cos \beta y &= y_A'' + R'(x - x_A) - P'(z - z_A) + \\ &+ Q \{ P(x - x_A) + Q(y - y_A) - R(z - z_A) \} - \Omega^2(y - y_A); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} \cos(\dot{r}z) &= \varepsilon_A'' + P'(y - y_A) - Q'(x - x_A) + \\ (2') \quad & - R'(z - z_A) - Q'(y + y_A) + R'(x - x_A) - \Omega^2(z - z_A). \end{aligned}$$

Первые члены въ правыхъ частяхъ равны проеціямъ на неподвижныя оси ускоренія ε_A полюса A .

$$\varepsilon_A'' = \dot{r} \cos(\dot{r}z); \quad \eta_A'' = r \cos(\dot{r}z) \dot{y} - r' \sin(\dot{r}z); \quad \xi_A'' = r \cos(\dot{r}z) \dot{x}.$$

Это ускореніе \dot{r} , общее всемъ точкамъ тѣла, носить названіе ускоренія поступательнаго.

Слѣдующіе члены:

$$\begin{aligned} Q(z - z_A) - R'(y - y_A) &= R'(y_A - y) - Q'(z_A - z); \\ R'(x - x_A) - P'(z - z_A) &= P'(z_A - z) - R'(x_A - x); \\ P'(y - y_A) - Q'(x - x_A) &= Q'(x_A - x) - P'(y_A - y), \end{aligned}$$

по (17) § 11 представляютъ собою проеціи на неподвижныя оси момента вокругъ взятой точки (x, y, z) вектора (P', Q', R') , приложеннаго къ точкѣ A . Векторъ (P', Q', R') по своей величинѣ равняется геометрической производной по времени отъ вектора $\Omega(P', Q', R')$, мгновенной угловой скорости; поэтому векторъ (P', Q', R') мы назовемъ угловымъ ускореніемъ и обозначимъ черезъ Ω . По своимъ размерамъ Ω сравнимъ съ

$$\frac{1}{(\text{едн. врем.})^2}$$

Ускореніе, зависящее отъ Ω , носить названіе вращательнаго; мы будемъ означать его символомъ ω . Тогда

$$\begin{aligned} Q'(z - z_A) - R'(y - y_A) &= \omega \cos(\omega z); \\ R'(x - x_A) - P'(z - z_A) &= \omega \cos(\omega y); \\ P'(y - y_A) - Q'(x - x_A) &= \omega \cos(\omega x). \end{aligned}$$

Иначе можно сказать, что ускореніе ω служить скоростью взятой точки тѣла въ томъ случаѣ, если бы тѣло вращалось около A , какъ неподвижнаго полюса, съ угловой скоростью Ω (§ 64)

Замѣтимъ, что

$$P = \Omega \cos(\Omega x); \quad Q = \Omega \cos(\Omega y); \quad R = \Omega \cos(\Omega z)$$

$$x = x_1 + \rho \cos(\rho \Omega); \quad y = y_1 + \rho \cos(\rho \theta); \quad z = z_1 + \rho \cos(\rho \varepsilon)$$

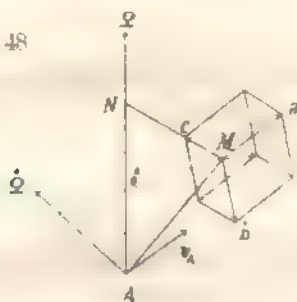
если ρ радиусъ вектора, идущий отъ A къ взятой точкѣ тѣла. Пользуясь этими формулами, послѣднимъ членамъ равенствъ (2) можемъ дать видъ:

$$P[P(x = x_1) + Q(y = y_1) + R(z = z_1)] = \Omega^2(x = x_1) \\ = \Omega^2 \rho [\cos(\rho \Omega) \cos(\Omega x) - \cos(\rho x)],$$

$$Q[P(x = x_1) + Q(y = y_1) + R(z = z_1)] = \Omega^2(y = y_1) \\ = \Omega^2 \rho [\cos(\rho \Omega) \cos(\Omega y) - \cos(\rho y)];$$

$$R[P(x = x_1) + Q(y = y_1) + R(z = z_1)] = \Omega^2(z = z_1) \\ = \Omega^2 \rho [\cos(\rho \Omega) \cos(\Omega z) - \cos(\rho z)].$$

Фиг. 48



Но, если (фиг. 48) $AM = \rho$ и AN кратчайшее расстояние M отъ оси Ω , то $AN = \rho \cos(\rho \Omega)$ и следовательно

$$\rho \cos(\rho \Omega) \cos(\Omega x) = \rho \cos(\rho x) = AN \cos(\angle AN, x) = AM \cos(\angle AM, x);$$

$$\rho \cos(\rho \Omega) \cos(\Omega y) = \rho \cos(\rho y) = AN \cos(\angle AN, y) = AM \cos(\angle AM, y);$$

$$\rho \cos(\rho \Omega) \cos(\Omega z) = \rho \cos(\rho z) = AN \cos(\angle AN, z) = AM \cos(\angle AM, z).$$

Правыя части представляютъ собою проекции на оси геометрической разности векторовъ AN и AM , т. е. вектора MN .

Поэтому можемъ написать:

$$P\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0)\} - \Omega^2(x - x_0) = \\ = \Omega^2 MN \cos(MN, x) = h \cos(h, x);$$

$$Q\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0)\} - \Omega^2(y - y_0) = \\ = \Omega^2 MN \cos(MN, y) = h \cos(h, y);$$

$$R\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0)\} - \Omega^2(z - z_0) = \\ = \Omega^2 MN \cos(MN, z) = h \cos(h, z).$$

Ускореніе, обозначенное нами h , носить названіе центростремительнаго; оно равно квадрату угловой скорости, умноженному на разстояніе точки отъ мгновенной оси, и направлено по этому кратчайшему разстоянію къ оси.

Такимъ образомъ окончательно находимъ:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos(v, x) &= \dot{v}_1 \cos(\dot{v}_1, x) + \omega \cos(\omega, x) + h \cos(h, x), \\ (3) \quad v \cos(v, y) &= v_1 \cos(\dot{v}_1, y) + \omega \cos(\omega, y) + h \cos(h, y); \\ \dot{v} \cos(\dot{v}, z) &= v_1 \cos(v_1, z) + \omega \cos(\omega, z) + h \cos(h, z); \end{aligned}$$

или, короче:

$$\dot{v} = (\dot{v}_1) + (\omega) + (h);$$

т. е. ускореніе какой либо точки твердаго тѣла равняется геометрической суммѣ трехъ ускореній — поступательнаго, вращательнаго и центростремительнаго.

Иначе (фиг. 48) ускореніе точки M выражается диагональю параллелепипеда $Mabc$, ребра котораго равны тремъ вышеупомянутымъ ускореніямъ: $Ma = v_1$; $Mb = \omega = \Omega \delta$, гдѣ δ разстояніе M отъ оси Ω ; Mb направлено перпендикулярно къ плоскости, содержащей M и Ω ; $Mc = MN \cdot \Omega^2$ и идетъ по MN къ Ω .

77. Проекціи ускоренія точекъ твердаго тѣла на оси неизмѣнно съ тѣломъ связанныя. Выраженія (3) умножаемъ соответственно на $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$, складываемъ и находимъ

$$v \cos(\dot{v}, \xi) = v_1 \cos(\dot{v}_1, \xi) + \omega \cos(\omega, \xi) + h \cos(h, \xi).$$

Здѣсь

$$\dot{v}_A \cos(\dot{v}_A \xi) = x_A'' \lambda_x + y_A'' \lambda_y + z_A'' \lambda_z;$$

$$\omega \cos(\omega \xi) = [Q'(z - z_A) - R'(y - y_A)] \lambda_x + [R'(z - z_A) - P'(z - z_A)] \lambda_y + [P'(y - y_A) - Q'(x - x_A)] \lambda_z;$$

$$h \cos(h \xi) = [P \lambda_x + Q \lambda_y + R \lambda_z] [P'(z - z_A) + Q'(y - y_A) + R'(z - z_A)] - \Omega^2 [(x - x_A) \lambda_x + (y - y_A) \lambda_y + (z - z_A) \lambda_z].$$

Въ выраженіи для ускоренія вращательнаго замѣнимъ каждый изъ косинусовъ $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ черезъ четыре по (5) § 58; тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} & [Q'(z - z_A) - R'(y - y_A)] (\mu_x v_x - \mu_y v_y) - [R'(z - z_A) - P'(z - z_A)] (\mu_x v_x - \\ & - \mu_y v_y) + [P'(y - y_A) - Q'(x - x_A)] (\mu_x v_x - \mu_y v_y) - \\ & - (P' \mu_x - Q' \mu_x + R' \mu_x) [(z - z_A) v_x + (y - y_A) v_y + (z - z_A) v_z] - \\ & - (P' v_x - Q' v_x + R' v_x) [(z - z_A) \mu_x + (y - y_A) \mu_y + (z - z_A) \mu_z]. \end{aligned}$$

Мы уже имѣли случай убѣдиться (§ 72) въ равенствахъ

$$\mu' = P \lambda_x + Q' v_x + R''', \quad q' = P' \mu_x + Q' \mu_x + R' \mu_x, \quad r' = P' v_x + Q' v_x + R' v_x.$$

Кромѣ того замѣнимъ абсолютныя координаты относительными по (4) § 57; тогда окажется

$$\omega \cos(\omega \xi) = q' \zeta - r' \eta.$$

Наконецъ вводимъ относительныя координаты и величины ρ, q, r въ ускореніе центростремительное:

$$P \lambda_x + Q \lambda_y + R \lambda_z = \rho;$$

$$P(z - z_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A) - \Omega \rho \cos(\Omega \rho) = \rho \zeta - q \eta - r \zeta,$$

если $\rho = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$.

Соединяя полученные результаты въ одну формулу, найдемъ:

$$\dot{v} \cos v \xi = v'' \lambda_x + v'' \lambda_y + v'' \lambda_z, \quad q' \zeta - r' \eta + \mu \rho \zeta - q \eta + r \zeta = \xi \Omega^2. \quad (4)$$

и, конечно, еще два выражения:

$$r \cos(\varphi_1) = x_1'' y_1'' - y_1'' x_1'' + z_1'' y_1'' - y_1'' z_1'' + q_1 r_1^2 - q_1 r_1^2 - r_1^2 \Omega^2$$

$$r \cos(\varphi_2) = x_2'' y_2'' - y_2'' x_2'' + z_2'' y_2'' - y_2'' z_2'' + q_2 r_2^2 - q_2 r_2^2 - r_2^2 \Omega^2.$$

78 Центръ ускореній Приведемъ нулю правыя части выражений (2). Тогда мы определимъ координаты x, y, z этой точки второго тѣла, которая въ рассматриваемомъ моментѣ не имѣетъ ускоренія. Она и есть центръ ускореній. Уравненія для координатъ центра если измѣнимъ порядокъ членовъ, можемъ написать такъ:

$$\begin{aligned} (P' - Q')(x - x_1) + (RQ - K)(y_1 - y_1) + (K'P' - Q')z_1 &= 0 \\ \Delta(PQ + R' - Q^2)(x - x_1) + (Q^2 - \Omega^2)(y_1 - y_1) + (QR - P')(z_1 - z_1) &= q_1'' \\ (RP - Q')(x - x_1) + (QR + P')(y_1 - y_1) + (R' - \Omega^2)(z_1 - z_1) &= z_1'' \end{aligned}$$

Определитель Δ этихъ уравненій разлагаемъ на сумму простыхъ:

$$\begin{aligned} \Delta = & \begin{vmatrix} P^2 - Q^2 & PQ - P' & PR - Q \\ PQ + R' & Q^2 - \Omega^2 & QR - P' \\ PR - Q' & QR + P' & R^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P^2 - Q^2 & R & Q \\ R' - \Omega^2 & -P' & + \\ -Q' & P' - \Omega^2 & \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} P & -R' & -Q' \\ +P & Q & -\Omega^2 \\ R & P' & -\Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega^2 & P & Q \\ -Q' & R' & -\Omega^2 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} -\Omega^2 & -R' & P \\ +R & R' & -\Omega^2 & Q \end{vmatrix} = \\ & -Q'P - R'P - RQ. \end{aligned}$$

Здесь мы не идемъ впередъ определятелей съ равными столбцами, такъ какъ они обращаются въ нуль. Теперь уже легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \Delta &= (P' + QQ' + RK)^2 - (P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) \\ &= -(QR' - RQ')^2 - (RP' - PR')^2 - (PQ' - QP')^2. \end{aligned}$$

Определитель Δ становится нулемъ, лишь для следующихъ случаевъ: 1) $P' = Q' = R' = 0$ или $\Omega = P$; 2) $P' = Q' = R' = 0$ или $\Omega = 0$ и

3) $\frac{P}{R} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$. Если, кромѣ того, соблюдено еще хотя бы одно изъ условий:

$$(6) \quad x_1'P - y_1'Q + z_1'R = 0 \quad \text{или} \quad x_1'P' - y_1'Q' + z_1'R' = 0,$$

то мы найдем, но один центр ускорений а безразличное множество точек, на прямой параллельно, либо оси ω , либо оси ω' . Такое обстоятельство заметь, место центр, для прежних тыла параллельно плоскости. Если же для перенесения наших условий (6) не соблюдаются, то центра ускорений нет.

Въ общемъ случаѣ Δ когда меньше нуля и ω существует только одна точка (x_0, y_0) . Возьмемъ ее за полюс, тогда, считая ω ось x , ω' ось y ускорения и произвольной точки тыла получимъ выражения

$$\dot{v} \cos(\dot{v} x) = Q'(x-x_0) - R(y-y_0) + P[P(x-x_0) + Q(y-y_0) + R(x-x_0) - \Omega^2(x-x_0)]$$

$$\dot{v} \cos(\dot{v} y) = R'(x-x_0) - P'(y-y_0) + Q[P(x-x_0) + Q(y-y_0) + R(x-x_0) - \Omega^2(y-y_0)]$$

$$\dot{v} \cos(\dot{v} z) = P'(y-y_0) - Q'(x-x_0) + R[P(x-x_0) + Q(y-y_0) + R(x-x_0) - \Omega^2(z-z_0)]$$

При такомъ выборѣ полюса остается лишь два составляющихъ ускорения — вращательное и центростремительное.

Какъ мы уже замѣтили, для движущаго тела параллельно плоскости существуетъ не одинъ центр, а цѣлая ось ускорений въ каждой изъ параллельныхъ плоскостей надлежитъ по центру. При соответственномъ выборѣ осей (27) выражения для проекции ускорения какой либо точки тыла теперь будутъ по (27) § 70:

$$\dot{v} \cos(\dot{v} x) = x_A'' - Q''(y - y_A) - Q'^2(x - x_A)$$

$$\dot{v} \cos(\dot{v} y) = y_A'' + Q''(x - x_A) - Q'^2(y - y_A)$$

Если координаты центра ускорения для разсматриваемой плоскости попрежнему x_0, y_0 , то имѣютъ предыдущихъ уравненій можемъ написать:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v} x) &= -Q''(y - y_0) - Q'^2(x - x_0); \\ \dot{v} \cos(\dot{v} y) &= Q''(x - x_0) - Q'^2(y - y_0) \end{aligned} \tag{7}$$

Центръ ускорения всегда существуетъ, если только $Q'^2 + Q''$ не нуль. Возвышая въ квадратъ (7) и складывая, находимъ:

$$\dot{v}^2 = Q'^2(Q'^2 + Q''), \tag{8}$$

т.е. $\dot{v}^2 = (Q'x - Q'y)^2 + Q''(y - y_0)^2$. Ускорений возрастаетъ пропорционально разстоянію точки отъ центра ускореній.

Далѣе, умножаемъ (7) соответственно на $\cos(\dot{\theta} r)$ и $\sin(\dot{\theta} r)$ и
 $= \frac{y-y_0}{r}$; получаемъ

$$\dot{\theta} \cos(\dot{\theta} r) = -\dot{\theta}^2 r.$$

Откуда и изъ (8) имѣемъ:

$$\cos(\dot{\theta} r) = -\frac{y^2}{\sqrt{y_0^2 + y^2}} = \text{const.},$$

т. е. уголъ, образуемый ускореніемъ любой точки фигуры съ радиусомъ векторомъ соединяющимъ эту точку и центръ ускореній, одинаковъ для всѣхъ точекъ.

ГЛАВА VII.

Относительное движение.

79. Движение точки абсолютное и относительное. Движение переносное. Представимъ себѣ, что точка m движется одновременно въ двухъ неизвѣстныхъ средахъ S и Σ . Положеніе m въ S и Σ опредѣляется съ помощью системъ осей Ox, y, z и $A\xi, \eta, \zeta$, неизмѣнно съ тѣлами S и Σ связанныхъ. Среда Σ и S движутся одна въ другой. Когда намъ дано движеніе тѣла Σ въ тѣлѣ S , то движеніе точки m въ Σ называется движеніемъ относительнымъ, а движеніе m въ S абсолютнымъ, данное же движеніе Σ въ S переноснымъ. Наоборотъ, когда извѣстно движеніе среды S въ средѣ Σ , то движеніе m въ S будетъ относительнымъ, а движеніе m въ Σ абсолютнымъ. Очевидно, если движеніе переносное въ первомъ случаѣ примемъ за прямое, то переносное во второмъ случаѣ будетъ обращеннымъ. Такимъ образомъ совершенно отъ нашей точки зрѣнія зависитъ, которое изъ двухъ движеній точки m назвать абсолютнымъ, которое относительнымъ.

Для дальнѣйшаго изложенія условимся полагать даннымъ движеніе тѣла Σ въ средѣ S . Тогда связь между тремя выше упомянутыми движеніями опредѣляется формулами (1) § 57:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi_1 + \eta_1\mu + \zeta_1\nu; \\ y &= y_1 + \xi_2 + \eta_2\mu + \zeta_2\nu; \\ z &= z_1 + \xi_3 + \eta_3\mu + \zeta_3\nu; \end{aligned} \quad (1)$$

если x, y, z и ξ, η, ζ координаты, абсолютныя и относительныя, точки m относительно осей Ox, y, z и $A\xi, \eta, \zeta$, а $x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \mu, \nu$ координаты тѣла Σ относительно среды S .

Из уравнений (1), находимъ для ξ , η , ζ , какъ уже имѣли въ (4) § 57, такія выраженія:

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_1)\mu_x + (y - y_1)\mu_y + (z - z_1)\mu_z, \\ (2) \quad \eta &= (x - x_1)\mu_x + (y - y_1)\mu_y + (z - z_1)\mu_z; \\ \zeta &= (x - x_1)\nu_x + (y - y_1)\nu_y + (z - z_1)\nu_z. \end{aligned}$$

Формулы (2) рѣшаютъ вопросъ объ опредѣленіи относительнаго движенія точки по даннымъ абсолютному и переносному. По формуламъ (1) находится абсолютное движеніе точки по даннымъ относительному и переносному. Опредѣлить переносное движеніе по абсолютному и относительному движенію одной только точки, вообще говоря невозможно, такъ какъ движеніе твердаго тѣла опредѣляется шестью функциями времени, шестью независимыми координатами тѣла, а уравненій (1) у насъ всего три.

Примеръ 1. Движеніе параллельно плоскости. Среда Σ совершаетъ Кардановское движеніе:

$$x_A = R \cos f(t); \quad y_A = R \sin f(t); \quad \psi = 2\pi - f(t).$$

Абсолютное движеніе точки дано уравненіями:

$$x = D \cos f(t); \quad y = D \sin f(t).$$

Уравненіями относительнаго движенія будутъ:

$$\xi = D - R \cos 2f(t); \quad \eta = (D - R) \sin 2f(t).$$

Относительная траекторія окружності $\xi^2 + \eta^2 = (D - R)^2$.

2. Среда Σ вращается около начала координатъ O , какъ ось z неподвижнаго полнаго шара.

$$x_A = \psi(t); \quad y_A = 0; \quad z_A = R; \quad \psi = f(t); \quad \theta = kf(t).$$

Относительное движеніе точки m дано уравненіями:

$$\xi = R \cos kf(t); \quad \eta = -R \sin kf(t); \quad \zeta = 0.$$

Абсолютное движеніе будетъ такое:

$$x = R \cos \alpha \cos f(t); \quad y = R \cos \alpha \sin f(t); \quad z = -R \sin \alpha.$$

Уравненія абсолютной траекторіи.

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \alpha; \quad z = -R \sin \alpha$$

80. Зависимость между скоростями абсолютного и относительного движения точки. Дифференцируя по времени формулы (1), найдем:

$$\begin{aligned}x' &= \xi \lambda_x + \eta' \mu_x + \zeta' \nu_x + (x_1' + \xi \lambda_x' + \eta \mu_x' + \zeta \nu_x'); \\y' &= \xi' \lambda_y + \eta' \mu_y + \zeta' \nu_y + (y_1' + \xi \lambda_y' + \eta \mu_y' + \zeta \nu_y'); \\z' &= \xi \lambda_z + \eta' \mu_z + \zeta' \nu_z + (z_1' + \xi \lambda_z' + \eta \mu_z' + \zeta \nu_z').\end{aligned}\quad (3)$$

Выражения, стоящие в скобках, представляют собою результаты дифференцирования (1) при ξ, η, ζ постоянных, следовательно, это проекция на оси скорости той точки твердого тела Σ , которая в рассматриваемый момент совпадает с движущейся точкою m . Такая скорость называется переносною, и мы ее обозначим w . Если скорость точки m в ее абсолютном и относительном движениях означим соответственно v и u и заметим, что $u \cos(u\xi) = \xi'$, $u \cos(u\eta) = \eta'$, $u \cos(u\zeta) = \zeta'$, то полученные равенства (3) можем переписать так.

$$\begin{aligned}x' &= v \cos(vx) = u \cos(ux) + w \cos(wx); \\y' &= v \cos(vy) = u \cos(uy) + w \cos(wy); \\z' &= v \cos(vz) = u \cos(uz) + w \cos(wz).\end{aligned}$$

Или, короче,

$$v = u + w,$$

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме скоростей относительной и переносной.

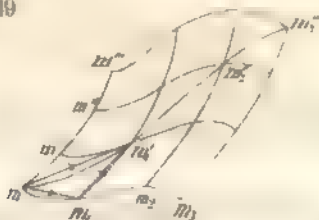
Тот же результат можно получить и геометрическим путем. Движущаяся точка m (фиг. 49) описывает внутри тела Σ относительную траекторию m, m_1, m_2, \dots . Эта кривая неразрывно связана с телом Σ , движется вместе с Σ в среду S .

Различные точки кривой m, m_1, m_2, \dots , в которые приходит движущаяся точка m для моментов t, t_1, t_2, \dots перемещаются в среде S по некоторым траекториям $mm', m, m_1', m_2, m_2', \dots$. Таким образом точка m для моментов t, t_1, t_2, \dots в среде S будет занимать положения m, m_1', m_2', \dots и ее абсолютная траектория m, m_1', m_2', \dots пересечется диагонально с лин. состоящую из различных положений в среде S относительной траектории $m, m_1, m_1', m_2, m_2', \dots$ и путей $mm', m, m_1', m_2, m_2', \dots$ в S тех точек тела Σ , которые лежат на относительной траектории. Векторы mm', mm'' и mm'''

представляют собою перемещения точки m въ абсолютномъ движеніи (mm') и въ относительномъ (mm_1), а также перемещеніе точки m тѣла Σ , m_1m' . Три эти вектора образуютъ замкнутый треугольникъ, т. е.

$$(mm') = (mm_1) + (m_1m').$$

Фиг. 49



Написанное равенство останется справедливымъ и тогда, когда все векторы раздѣлимъ на $t_2 - t_1$. Отсюда заключаемъ, что и предѣльный векторъ

$$\text{Пред.} \left(\frac{mm'}{t_2 - t_1} \right)_{t_1 \rightarrow t_2}$$

будетъ геометрической суммой предѣльныхъ векторовъ

$$\text{Пред.} \left(\frac{mm_1}{t_2 - t_1} \right)_{t_1 \rightarrow t_2} \quad \text{и} \quad \text{Пред.} \left(\frac{m_1m'}{t_2 - t_1} \right)_{t_1 \rightarrow t_2}$$

Предѣлъ $\frac{mm_1}{t_2 - t_1}$ (см. § 41) абсолютную скорость точки m (или момента t); предѣлъ $\frac{m_1m'}{t_2 - t_1}$ представляетъ собою относительную скорость m для того же момента. Наконецъ, въ предѣлѣ точка m_1 сливается съ m , и слѣд. послѣдній предѣлъ служитъ скоростью переносной. Такимъ образомъ выведенное положеніе доказано.

81. Связь между ускореніями точки въ абсолютномъ и относительномъ движеніяхъ. Ускореніе поворотное. Теорема Кориолиса. Ускореніе точекъ твердаго тѣла находится приемомъ гораздо болѣе сложнымъ (§ 76), чѣмъ скорость, за исключеніемъ случая движенія поступательнаго. Поэтому и связь между ускореніями абсолютнымъ и относительнымъ не будетъ столь простою, какъ для скоростей. Дифференцируя по времени равенства (3), найдемъ

$$\begin{aligned} a'' &= \xi''v_r - \eta(\mu_r + \zeta''v_r) + (\alpha'' + \xi''v_r + \tau_1\mu_r'' + \zeta''v_r'') + 2[\xi'v_r' + \tau_1'\mu_r' + \zeta'v_r']; \\ (5) \quad \eta'' &= \xi''v_r + \tau_1''\mu_r + \zeta''v_r + (\eta'v_r' + \xi'v_r'') + \tau_1\mu_r'' - \zeta v_r'' + 2[\xi'v_r' + \tau_1'\mu_r' + \zeta'v_r']; \\ \zeta'' &= \xi''v_r + \tau_1''\mu_r - \zeta''v_r + (\zeta'v_r' + \xi'v_r'') + \tau_1\mu_r'' + \zeta v_r'' + 2[\xi'v_r' - \tau_1'\mu_r' + \zeta'v_r']; \end{aligned}$$

Выраженія, стоящія въ круглыхъ скобкахъ, получаются изъ (1) двойнымъ дифференцированиемъ по времени при ξ, η, ζ постоянныхъ, слѣд. они служатъ проекціями на оси ускоренія той точки твердаго тѣла, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ движущеюся точкою m . Это ускореніе называется переноснымъ; означимъ его w .

Формулы, заключенныя въ прямыя скобки, сравнимъ съ (2) § 64. дающими проекціи вращательной скорости точекъ тѣла:

$$x' = \xi \lambda_x' + \eta \mu_x' + \zeta \nu_x';$$

$$y' = \xi \lambda_y' + \eta \mu_y' + \zeta \nu_y';$$

$$z' = \xi \lambda_z' + \eta \mu_z' + \zeta \nu_z';$$

Какъ видимъ, приведенныя выраженія отличаются отъ разсматриваемыхъ лишь тѣмъ, что въ нихъ стоятъ ξ, η, ζ вмѣсто ξ', η', ζ' ; слѣд. послѣдніе члены равенствъ 5) представляютъ собою удвоенную вращательную скорость точки твердаго тѣла съ координатами ξ', η', ζ' . Иначе говоря, построимъ изъ полюса A годографъ относительной скорости, тогда разбираемая выраженія даютъ вращательную скорость точки, чертящей этотъ годографъ. Самому ускоренію, о которомъ мы говоримъ, рѣдко даютъ особое названіе, обыкновенно ускореніе равное и противоположное ему называютъ поворотнымъ. Мы обозначимъ поворотное черезъ k , а ускореніе точки въ движешяхъ абсолютномъ и относительномъ пусть будутъ v и w . Тогда, замѣчая, что:

$$\dot{w} \cos(\dot{w} \xi) = \xi''; \quad \dot{w} \cos(\dot{w} \eta) = \eta''; \quad \dot{w} \cos(\dot{w} \zeta) = \zeta''; \quad (6)$$

равенство (6) перепишемъ такъ

$$\dot{w} \cos(\dot{w} r) = \dot{w} \cos(\dot{w} a) + w' \cos(\dot{w} x) - k \cos(ka);$$

$$v \cos(\dot{w} a) = \dot{w} \cos(\dot{w} y) + w' \cos(\dot{w} y) - k \cos(ka);$$

$$\dot{w} \cos(\dot{w} z) = \dot{w} \cos(\dot{w} z) + w' \cos(\dot{w} z) - k \cos(ka);$$

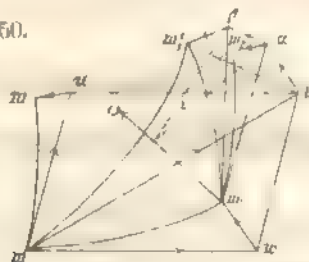
или, короче,

$$(\dot{w}) = (\dot{w}) + (w') - (k). \quad (7)$$

Абсолютное ускореніе точки равняется геометрической суммѣ ускореній относительнаго, переноснаго и обратнаго поворотному.

Это положение почти название теоремы Корiolаса. Из справедливости ее можно убедиться и из геометрических соображений. Точка m (фиг. 50) в промежуток времени Δt переместится по относительно траектории в точку m' , за то же время точка c (фиг. 50) совпадающая с m переместится по своей траектории в m_1 . Построим скорости v и v_1 относительно в перпендикулярном направлении и отложим на них отрезки am и am_1 соответственно равные $v\Delta t$ и $v_1\Delta t$. Если бы движение переносное было поступательное, то отложив на траектории c перпендикулярно с ней связанной вектору am отрезок am_1 продолжил cm_1 и mm_1 параллельными первоначальным. Но вследствие вращения переносного вектору am повернется около мгновенной оси m_1 и

Фиг. 50.



повернется m_1 на некоторый бесконечно малый угол $\alpha = \Omega\Delta t$, если Ω мгновенная угловая скорость для рассматриваемого момента. Абсолютная скорость v' , по предыдущему, изобразится диагональю параллелограмма, построенного на v и v_1 , следовательно вектор mm' равен cm_1 . Если соединим прямыми точку c с m , m' с m_1 и v с v_1 , то получим с рис. (50) для движений относительного, переносного и абсолютного. Замечаем, что

$$(mm') = (v\alpha) + (v_1\beta) + (\beta m_1).$$

Но $v\alpha = v\Omega\Delta t$, $\beta m_1 = v_1\Omega\Delta t$, $v_1\Omega\Delta t$ вращает βm_1 параллельно mm_1 .

Таким образом представлять собою перемещение точки x вследствие вращения тела вокруг оси m_1 на угол α , следовательно

$$\alpha x = v \cdot m_1 \cdot \alpha \cdot \sin(m_1\Omega, m_1, x) = \Omega \cdot v \sin(\Omega, v) \cdot \Delta t^2.$$

По 4) § 81 для получения ускорения a о стрелку разложить на $\frac{1}{2} \Delta t^2$ (сделавши это, найдем)

$$2am' = \frac{2vm_1}{\Delta t^2} + \frac{2v_1m_1}{\Delta t^2} + \frac{2vm'}{\Delta t^2} + 2\Omega v \sin(2\alpha).$$

В первой части равенства получаем в предельном ускорение переносное относительное, последний член представляет собою ускорение обратное поворотному. Таким образом теорема Корiolаса доказана.

Поворотное ускорение k , какъ удвоенная вращательная скорость точки съ радиусомъ векторомъ, равнымъ a , выразится такъ:

$$k = 2\Omega u \sin(\Omega u) \quad (8)$$

откуда видимъ, что поворотное ускорение исчезаетъ, 1) если переносное движение поступательное ($\Omega = 0$); 2) если относительная скорость параллельна мгновенной оси переносного движения ($\sin(\Omega u) = 0$), 3) если точка находится въ относительномъ покое ($u = 0$).

Проекції ускоренія k на оси легко получаются изъ формулъ Эйлера (5) § 64 и (11) § 66, если въ нихъ замѣнить

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \quad \text{черезъ} \quad a \cos(\alpha x), \quad a \cos(\alpha y), \quad a \cos(\alpha z);$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}, \quad \dot{y} = \dot{\eta}, \quad \dot{z} = \dot{\zeta} \quad \text{черезъ} \quad \dot{\xi}', \quad \dot{\eta}', \quad \dot{\zeta}';$$

такъ какъ по вышесказанному поворотное ускореніе прямо противоположно удвоенной вращательной скорости точки съ относительными координатами ξ', η', ζ' , т. е. съ радиусомъ векторомъ a . Такимъ образомъ имѣемъ съ одной стороны по § 64

$$k \cos(kx) = 2\{R \eta \cos(\alpha y) - Q \eta \cos(\alpha z)\};$$

$$k \cos(ky) = 2\{P \eta \cos(\alpha z) - R \eta \cos(\alpha x)\}; \quad (9)$$

$$k \cos(kz) = 2\{Q \eta \cos(\alpha x) - P \eta \cos(\alpha y)\};$$

а съ другой по (12) § 66:

$$k \cos(k\xi) = 2(r\eta' - q\zeta');$$

$$k \cos(k\eta) = 2(p\zeta' - r\xi'); \quad (10)$$

$$k \cos(k\zeta) = 2(q\xi' - p\eta').$$

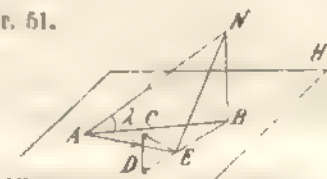
Примѣръ. Пусть среда Σ неизмѣнно соединена съ плоскостью земной орбиты, а среда Σ' съ землею. За полюсъ A беремъ какуюнибудь точку на земной поверхности. По горизонтальной плоскости H (фиг. 51), проходящей черезъ A , движется нѣкоторая точка ρ съ ускореніемъ равнымъ ускоренію точки A , т. е. поступательной части переноснаго ускоренія. Опредѣлимъ проекцію на плоскость H относительнаго ускоренія точки ρ .

Угловая скорость земли Ω направлена параллельно земной оси къ южному полюсу и по величинѣ

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164.10} = 0,0000729 \frac{1}{\text{секун. средн. врем.}}$$

Если точка α не удаляется от A на значительное расстояние, то по частоте Ω , центробежную часть переносного ускорения, пропорциональную Ω^2 , мы можем пренебречь. Ускорение вращательное нуль, так как Ω постоянна (процессия и нутация в расчет не принимаются). При любых обстоятельствах все переносное ускорение сводится к одной поступательной члоти.

Фиг. 51.



Прилагая теорему Корюлиса, видим, что абсолютное ускорение сокращается с переносным, и след, относительное ускорение равняется одному только поворотному.

Пусть точка A во сферном полушарии. NA , мгновенная ось плоскости A , направлена по оси шара в южному полюсу. Если AE представляет относительную скорость v точки α , то поворотное ускорение изобразится вектором EC , перпендикулярным к плоскости ANE и дуговым так, как показано на чертеже; при томъ

$$EC = 2\Omega v \sin EAN.$$

Проведемъ двѣ вертикальныя плоскости AMB и EBN ; первую — меридианъ — черезъ ось шара, вторую перпендикулярно к AE . Тогда $\sphericalangle NEB =$

$$\frac{1}{2} CED, \text{ если } BD \text{ прямая; кромѣ того } \sphericalangle LAB = \lambda, \text{ широта мѣста.}$$

Проекція EC на плоскость H равняется $EA \cdot \cos CED = EC \sin NEB$, по

$$\sin EAN = \frac{EN}{AN}; \quad \sin NEB = \frac{NB}{EN};$$

слѣдовательно

$$EC \cdot \cos CED = 2\Omega v \frac{NB}{AN} = 2\Omega v \sin \lambda.$$

Оказывается, что EC , если и относительное ускорение перпендикулярно к относительной скорости, направлена для сфернаго полушарія в вращательную сторону и по величинѣ пропорциональна относительной скорости и синусу широты мѣста.

82 Движеніе твердаго тѣла относительное и абсолютное. Движеніе переносное. Пусть твердое тѣло T движется одновременно въ двухъ средахъ S и Σ . Положеніе T относительно S и Σ определяется съ помощью трехъ системъ координатныхъ осей: $Oxyz$,

неизмѣнно связанныхъ съ S , $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, неизмѣнно связанныхъ съ Σ и $Babc$, неизмѣнно связанныхъ съ T . Все три системы осей беремъ ортогональными. Среды S и Σ движутся одна въ другой. Если намъ дано движеніе Σ въ S , то движеніе T въ Σ называется относительнымъ, движеніе T въ S абсолютнымъ, а движеніе Σ въ S переноснымъ. И здѣсь опять зависеть отъ нашей точки зрѣнія, которое изъ двухъ движеній тѣла T назвать относительнымъ, которое абсолютнымъ. Въ одномъ случаѣ переноснымъ сдѣлать движеніе Σ въ S , въ другомъ обращенное движеніе, т. е. движеніе S въ Σ . Въ дальнѣйшемъ мы принимаемъ за переносное движеніе Σ въ S .

Положеніе тѣла Σ въ S опредѣляется двенадцатью координатами $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots$. Значенія ихъ намъ уже извѣстны (§ 57). Подобнымъ образомъ для тѣла T координатами относительно S или абсолютными сдѣлать величины:

$$\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \dots$$

а координатами T относительно Σ или относительными будутъ:

$$\xi_3, \eta_3, \zeta_3, \lambda_3, \mu_3, \nu_3, \dots$$

Здѣсь $\xi_3, \eta_3, \zeta_3, \lambda_3, \mu_3, \nu_3$ координаты относительныя и абсолютныя начала B осей $Babc$, значенія же символы для косинусовъ, ясны изъ нижеслѣдующихъ схемъ:

	x	y	z		ξ	η	ζ
a	a_x	a_y	a_z		μ_x	μ_y	μ_z
b	b_x	b_y	b_z		ν_x	ν_y	ν_z
c	c_x	c_y	c_z		λ_x	λ_y	λ_z

Абсолютныя координаты тѣла T черезъ относительныя и черезъ координаты среды Σ выражаются такъ:

$$\xi_2 = \xi_1 + \xi_3 \mu_x + \eta_3 \mu_y + \zeta_3 \mu_z,$$

$$\eta_2 = \eta_1 + \xi_3 \nu_x + \eta_3 \nu_y + \zeta_3 \nu_z,$$

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \xi_3 \lambda_x + \eta_3 \lambda_y + \zeta_3 \lambda_z,$$

$$a_2 = \lambda_x \lambda_x + \mu_x \mu_x + \nu_x \nu_x,$$

$$\begin{aligned}
 h_x &= \mu_x a_x + \mu_y a_y + \nu_x v_x, \\
 c_x &= \mu_x l_x + \mu_y l_y + \nu_x v_x, \\
 a_x &= \lambda_x \lambda_x + \mu_x \mu_x + \nu_x v_x, \\
 h_y &= \mu_x a_x + \mu_y a_y + \nu_x v_x, \\
 c_y &= \lambda_x \lambda_y + \mu_x \mu_y + \nu_x v_y, \\
 a_y &= \lambda_x \lambda_y + \mu_x \mu_y + \nu_x v_y, \\
 h_x &= \mu_x l_x + \mu_y l_y + \nu_x v_x, \\
 c_x &= \mu_x l_x + \mu_y l_y + \nu_x v_x, \\
 a_x &= \lambda_x \lambda_x + \mu_x \mu_x + \nu_x v_x.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Решая эти равенства относительно количеств $\tilde{x}_B, \tilde{y}_B, \tilde{z}_B, \tilde{t}_B, \tilde{\lambda}_B, \dots, \tilde{\nu}_B$, г. е. относительныхъ координатъ тѣла T , получимъ:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_B &= (x_B - x_A) \lambda_x + (y_B - y_A) \lambda_y + (z_B - z_A) \lambda_z, \\
 \eta_B &= (x_B - x_A) \mu_x + (y_B - y_A) \mu_y + (z_B - z_A) \mu_z, \\
 \zeta_B &= (x_B - x_A) \nu_x + (y_B - y_A) \nu_y + (z_B - z_A) \nu_z, \\
 \tilde{\lambda}_x &= \lambda_x a_x + \lambda_y a_y + \lambda_z a_z, \\
 \tilde{t}_x &= \lambda_x l_x + \lambda_y l_y + \lambda_z l_z, \\
 \tilde{\lambda}_y &= \lambda_x c_x + \lambda_y c_y + \lambda_z c_z, \\
 \tilde{\mu}_x &= \mu_x a_x + \mu_y a_y + \mu_z a_z, \\
 \tilde{\mu}_y &= \mu_x l_x + \mu_y l_y + \mu_z l_z, \\
 \tilde{\mu}_z &= \mu_x c_x + \mu_y c_y + \mu_z c_z, \\
 \tilde{\nu}_x &= \nu_x a_x + \nu_y a_y + \nu_z a_z, \\
 \tilde{\nu}_y &= \nu_x l_x + \nu_y l_y + \nu_z l_z, \\
 \tilde{\nu}_z &= \nu_x c_x + \nu_y c_y + \nu_z c_z.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Наконецъ координаты среды Σ черезъ тѣ и другія координаты тѣла T могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ.

$$x_A = x_B - \sum_{i=1}^3 \gamma_{iB} (\lambda_i a_x + \lambda_i b_x + \lambda_i c_x) - \gamma_{iB} (\mu_i a_x + \mu_i b_x + \mu_i c_x) - \\ - \sum_{i=1}^3 \nu_i (v_i a_x + v_i b_x + v_i c_x),$$

$$y_A = y_B - \sum_{i=1}^3 \gamma_{iB} (\lambda_i a_y + \lambda_i b_y + \lambda_i c_y) - \gamma_{iB} (\mu_i a_y + \mu_i b_y + \mu_i c_y) - \\ - \sum_{i=1}^3 \nu_i (v_i a_y + v_i b_y + v_i c_y),$$

$$z_A = z_B - \sum_{i=1}^3 \gamma_{iB} (\lambda_i a_z + \lambda_i b_z + \lambda_i c_z) - \gamma_{iB} (\mu_i a_z + \mu_i b_z + \mu_i c_z) - \\ - \sum_{i=1}^3 \nu_i (v_i a_z + v_i b_z + v_i c_z);$$

$$\lambda_x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x,$$

$$\mu_x = \mu_1 a_x + \mu_2 b_x + \mu_3 c_x,$$

$$\nu_x = \nu_1 a_x + \nu_2 b_x + \nu_3 c_x,$$

$$\lambda_y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y,$$

$$\mu_y = \mu_1 a_y + \mu_2 b_y + \mu_3 c_y,$$

$$\nu_y = \nu_1 a_y + \nu_2 b_y + \nu_3 c_y,$$

$$\lambda_z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

$$\mu_z = \mu_1 a_z + \mu_2 b_z + \mu_3 c_z,$$

$$\nu_z = \nu_1 a_z + \nu_2 b_z + \nu_3 c_z.$$

(13)

Формулы (11) рѣшаютъ вопросъ о нахожденіи абсолютнаго движенія тѣла T по даннымъ относительному и переносному. Выраженія (12) опредѣляютъ относительное движеніе по даннымъ абсолютному и переносному. По послѣднимъ равенствамъ (13) находится переносное движеніе по даннымъ абсолютному и относительному.

Примѣръ: Две плоскости параллельно плоскости Гогля, если оси Ox , A , B выбравъ по порядку къ семейству параллельныхъ плоскостей, то мы можемъ положить:

$$x_B = x_A + t, \quad y_B = y_A + t, \quad z_B = z_A + t, \quad \text{или} \quad \gamma_{iB} = 1, \quad \nu_i = 0, \quad \mu_i = 0, \quad \lambda_i = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Абсолютное движеніе дано уравненіями:

$$x_B = R \cos 2f; \quad y_B = R \sin 2f;$$

$$a_x = \cos 2f; \quad a_y = \sin 2f; \quad b_x = -\sin 2f; \quad b_y = \cos 2f;$$

гдѣ $f = f(t)$ произвольная функция времени.

Относительное движение пусть будетъ:

$$\begin{aligned} \xi_B &= R_1 \cos f; & \eta_B &= -R_1 \sin f; \\ \lambda_A &= \cos f; & \mu_A &= \sin f; & \mu_B &= -\sin f; & \mu_A &= \cos f. \end{aligned}$$

Тогда переносное опредѣляется уравненіями:

$$\begin{aligned} x_A &= (R - R_1) \cos 2f; & y_A &= (R - R_1) \sin 2f; \\ \lambda_x &= \cos 2f; & \mu_x &= -\sin 2f; & \lambda_y &= \sin 2f; & \mu_y &= \cos 2f. \end{aligned}$$

83. Зависимость между поступательными и угловыми скоростями въ движеніяхъ абсолютномъ и относительномъ. Положимъ, что въ разсматриваемый моментъ системы осей $Oxyz$, $A\xi\eta$ и $B\lambda\mu$ совпадаютъ. Возьмемъ какую либо точку m тѣла I . По § 80 скорость абсолютная v этой точки равна геометрической суммѣ скоростей относительной u и переносной w .

$$(14) \quad (v) = (u) + (w).$$

Поступательную скорость въ движеніи абсолютномъ означимъ v , въ относительномъ u , въ переносномъ w ; мгновенная угловая скорость абсолютная пусть будетъ Ω , относительная ω , переносная ω_1 , а проекціи этихъ скоростей на совпадающія оси: $P, Q, R, p, q, r, p_1, q_1, r_1$. Тогда по (18) § 68, имѣемъ для проекцій на Ox :

$$\begin{aligned} v \cos \alpha &= v_B \cos (\nu_B \alpha) + Q\Omega - Ry; \\ u \cos (\mu \alpha) &= u_B \cos (\mu_B \alpha) + q\omega - ry; \\ w \cos (\nu \alpha) &= v_A \cos (\nu_A \alpha) + q_1\omega_1 - r_1 y; \end{aligned}$$

здѣсь x, y, z , координаты разсматриваемой точки m .

Отсюда по (14) вытекаетъ

$$v_B \cos (\nu_B \alpha) - (Q - Ry - v_A \cos (\nu_A \alpha)) = u_B \cos (\mu_B \alpha) + q + q_1 = (v + v_1) u.$$

Написанное равенство должно оставаться справедливымъ для произвольныхъ значений x, y, z , слѣд.

$$(15) \quad \begin{aligned} v_B \cos (\nu_B \alpha) &= v_A \cos (\nu_A \alpha) + u_B \cos (\mu_B \alpha); \\ Q &= q + q_1; & R &= r - r_1. \end{aligned}$$

Взявши проекции на оставшиеся два оси, найдем:

$$v_B \cos(v_B y) = v_A \cos(v_A y) + u_B \cos(u_B y);$$

$$v_B \cos(v_B z) = v_A \cos(v_A z) + u_B \cos(u_B z);$$

$$V = v + v_1. \quad (15')$$

Полученные результаты можно написать короче

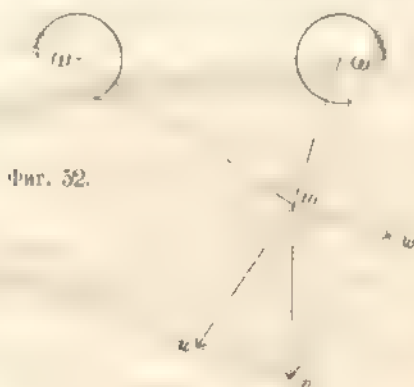
$$(v_B) = (v_A) + (u_B); \quad (16)$$

$$(\Omega_2) = (\omega) + (\omega_1). \quad (17)$$

Итакъ если полюсы A и B совпадаютъ, то поступательная скорость въ движеніи абсолютно равна геометрической суммѣ поступательныхъ скоростей въ движеніяхъ относительномъ и переносномъ.

Мгновенная угловая скорость въ абсолютномъ движеніи равняется геометрической суммѣ угловыхъ скоростей въ движеніяхъ относительномъ и переносномъ. Теорема эта, конечно, имѣетъ мѣсто независимо отъ того, какія точки взяты за полюсы A и B , совпадающія или нѣтъ, такъ какъ выборъ полюса на величину и направление мгновенной угловой скорости вовсе не вліяетъ (§ 68).

Въ частномъ случаѣ, когда во все время движенія $(\omega) + (\omega_1) = 0$, абсолютное движеніе (17) будетъ поступательное. Въ этомъ легко



убѣдиться и непосредственно. Пусть (фиг. 52) ω и ω_1 , слѣды соответственныхъ осей на плоскости, содержащей взятую точку m и перпендикулярной къ осямъ; при чемъ угловыя скорости ω и ω_1 ,

равны по абсолютной величинѣ, но противоположно направлены, какъ это указано на чертежѣ стрѣлками. Тогда скорости точки m выразятся векторами mv и mv_1 , если

$$\frac{mv}{m\omega} = \frac{mv_1}{m\omega_1} - \omega$$

Такъ какъ, кромѣ того, направленія mv и mv_1 перпендикулярны къ $m\omega$ и къ $m\omega_1$, то треугольники mvv_1 и $m\omega\omega_1$ подобны, а потому векторъ mv_1 , изображающій абсолютную скорость точки m , съ одной стороны перпендикуляренъ къ $\omega\omega_1$, а съ другой по величинѣ своей найдется изъ пропорціи

$$\frac{mv}{m\omega} = \frac{mv_1}{\omega\omega_1} - \omega,$$

откуда $mv = \omega \delta$. Такимъ образомъ оказывается, что абсолютная скорость постоянна по величинѣ и направленію, т. е. вовсе не зависитъ отъ положенія точки m , что мы и желали получить.

84. Разложеніе движенія точки и твердаго тѣла. Разложеніе скорости и ускоренія точки. угловой скорости тѣла. Представимъ себѣ нѣсколько неизмѣняемыхъ средъ S_1, S_2, \dots, S_n и точку m , движущуюся въ нихъ. Пусть намъ даны движенія S_1 въ S_2, S_2 въ S_3, \dots, S_{n-1} въ S_n . Тогда по предъидущему, зная относительное движеніе m въ S_1 , найдемъ (§ 79) абсолютное движеніе m въ S_2 ; опредѣливъ такимъ образомъ относительное (для новой точки зрѣнія) движеніе m въ S_2 , найдемъ абсолютное въ S_3 и т. д. до абсолютнаго движенія m въ S_n . Наоборотъ, по данному абсолютному движенію m въ S_n опредѣлимъ послѣдовательно относительное въ S_{n-1}, S_{n-2}, \dots до относительнаго въ S_1 . Такой способъ разсмотрѣнія движенія точки m въ средѣ S_n , съ которыми мы уже встрѣчались (§ 62), носятъ названіе разложенія движенія m въ S_n на относительное въ S_1 и $n-1$ переносныхъ S_1 въ S_2, S_2 въ S_3, \dots, S_{n-1} въ S_n . Движеніе m въ S_n называется тогда сложнымъ или составнымъ, а движенія остальные составляющими.

Скорость точки m въ движеніи относительно S_1 означимъ черезъ v_1 , скорость переносную въ движеніяхъ S_1 въ S_2 черезъ v_2, S_2 въ S_3 черезъ v_3, \dots, S_{n-1} въ S_n черезъ v_n , а абсолютную скорость m въ S_n черезъ v . Скорость абсолютная точки m въ S_n (§ 80) будетъ $(v_1) + (v_2)$, скорость абсолютная въ S_1 представится геометрическою суммою предъидущей скорости: $(v_1) + (v_2)$, и скорости (v_3) и т. д., такъ что окончательно

$$(18) \quad (v) = (v_1) + (v_2) + \dots + (v_n).$$

Скорость точки m въ ея движенияхъ относительно среды S_0 представляется некоторымъ векторомъ v . Всякій векторъ, а слѣд. и v , мы можемъ (§ 5) разложить на составляющіе. Эти составляющіе векторы по началу однородности въ свою очередь должны и изображать некоторыя скорости. Но, само собою разумѣется, точка m въ своемъ движеніи относительно S_0 въ данный моментъ можетъ имѣть только одну скорость, слѣд. составляющіе вектора v должны представлять собою либо скорость той же точки m относительно какой либо другой среды, либо скорость относительно той же среды S_0 другой какой нибудь точки, либо скорость другой какой нибудь точки, а не m , относительно другой какой нибудь среды, а во S_0 . Предыдущимъ, полученнымъ нами, равенствомъ (18) и пользуется обыкновенно для того, чтобы дать кинематическій смыслъ составляющимъ разложеннаго вектора—скорости. Такъ, мы видѣли раньше (§ 41 и § 3), что скорость v точки m относительно среды, связанной съ осямъ $Oxyz$, равна геометрической суммѣ векторовъ v'

$\frac{dx}{dt}, y', \frac{dy}{dt}, z', \frac{dz}{dt}$ параллельныхъ соответственнымъ осямъ:

$$(v) = (x') + (y') + (z'). \quad (19)$$

Представимъ себѣ, что наша точка m движется по прямой am (фиг. 26), параллельной Ox , со скоростью x' , прямая am движется поступательно въ плоскости abm съ скоростью y' , параллельно Oy , и наконецъ плоскость abm движется поступательно параллельно Oz со скоростью z' . Тогда v' будетъ скорость точки m относительно прямой am , y' будетъ переносная скорость прямой am относительно плоскости abm , иначе, скорость той точки прямой am , которая совпадаетъ съ m ; z' переносная скорость плоскости abm относительно среды $Oxyz$.

Само собою понятно, что приведенное толкованіе равенства (19) не единственное; такихъ толкованій можно дать много, напр. по § 42 каждую изъ скоростей x', y', z' мы можемъ разсматривать какъ скорость относительно той же среды $Oxyz$ трехъ проекцій m, m_x, m_y нашей точки m на координатныя оси.

Для ускореній въ движеніяхъ сложномъ и составляющихъ: v, v_1, v_2, \dots, v_n , можно доказать равенство, подобное (18):

$$(\dot{v}) = (\dot{v}_1) + (\dot{v}_2) + \dots + (\dot{v}_n), \quad (20)$$

только тогда переносныя движенія и теоремъ Коріолиса (§ 81) все въ должны быть поступательными, между тѣмъ какъ для скоростей (§ 80) въ такомъ ограниченіи вовсе нѣтъ нужды.

Мы видели раньше (§ 40), что ускорение i точки представляется следующей геометрической суммой:

$$(\ddot{r}) = (\ddot{x}'') + (\ddot{y}'') + (\ddot{z}'').$$

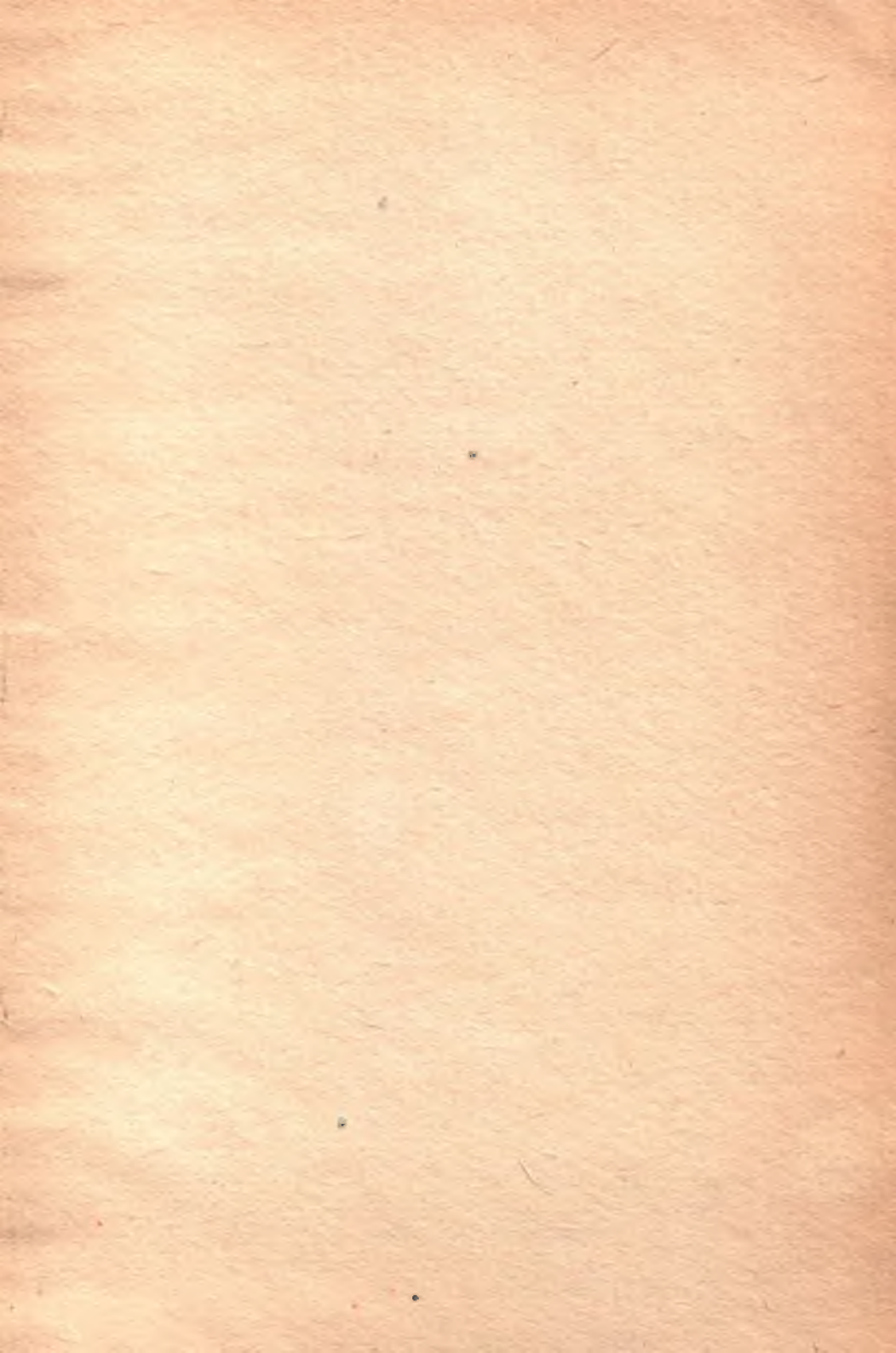
Разложимъ движение точки такъ, какъ мы это сдѣлали только что для скорости, тогда можемъ сказать, что \ddot{x}'' ускореніе относительное въ движеніи по прямой om (фиг. 26); \ddot{y}'' — переносное для поступательнаго движенія прямой om по плоскости bam ; \ddot{z}'' — ускореніе переносное для и ступательнаго движенія плоскости bam .

Разсужденія подобныя предыдущимъ, можно примѣнить и въ твердому тѣлу. Пусть твердое тѣло T движется въ средѣ S_1 , среда S_1 въ S_2 , S_2 въ S_3, \dots, S_n въ S_n . Тогда абсолютное движеніе T въ S_n разлагается на относительное въ S_1 и $(n-1)$ переносныхъ S_1 въ S_2 , S_2 въ S_3, \dots, S_{n-1} въ S_n . Оставляемъ въ сторонѣ скорости поступательныя, такъ какъ теорема (16) справедлива лишь при совпадѣніи полюсовъ и слѣд. не даетъ ничего новаго, а лишь повторяетъ сказанное о точкѣ. Положимъ, что мгновенная угловая скорость T въ S_1 означена ω_1 , угловая скорость переноснаго движенія S_1 въ S_2 — ω_2 ; S_2 въ S_3 — ω_3, \dots, S_{n-1} въ S_n — ω_n , T въ S_n — ω . Тогда по (17) послѣдовательно найдемъ:

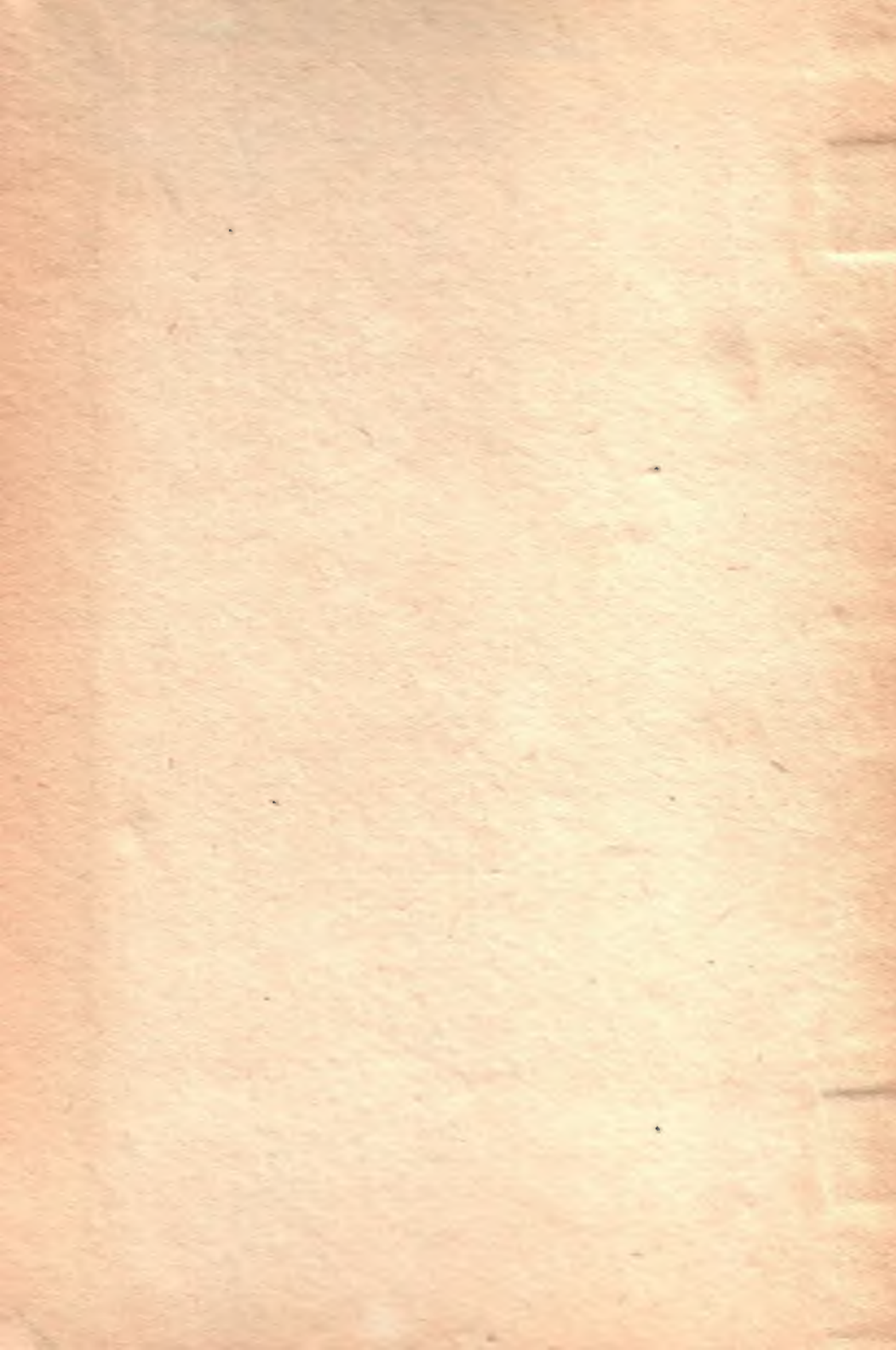
$$(21) \quad (\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + \dots + (\omega_n).$$

И этия равенства мы пользуемся также, какъ (18) для разложенія угловыхъ скоростей тѣла на составляющія. Такъ мы видали (§ 65), что угловая скорость Ω твердаго тѣла равна геометрической суммѣ трехъ угловыхъ скоростей α', ψ', θ' вокругъ осей AN, A_1 и A_1' . Пусть твердое тѣло вращается съ угловою скоростью θ' въ средѣ S_1 ; среда S_1 вращается въ средѣ S_2 съ угловою скоростью ψ' и наконецъ S_2 въ средѣ, соединенной съ осями A_1 и A_1' , вращается со скоростью α' . Тогда разложеніе Ω на векторы α', ψ', θ' будетъ не только представлять собою геометрическое построеніе, весьма удобное, но имѣть и кинематическій смыслъ, а именно, абсолютная угловая скорость Ω твердаго тѣла по (21) такъ выразится черезъ относительную θ' и переносныя ψ' и α' :

$$(\Omega) = (\theta') + (\alpha') + (\psi').$$







531

16m

N/1501